PRINCIPIA
ET
PROBLEMATA
ALIQUOT
Geometrica
Antè Desperata,
Nunc breviter Explicata & Demonstrata.

Autore *T. H.* Malmesburiensi.

LONDINI,
Excudebat *J. C.* pro *Gulielmo Crook*, ad signum Draconis Viridis in Vico Vulgò Vocatò Without Temple-bar.
M. DC. LXXIV.

CAP. I.

De Subjecto, Principiis, & Methodo Mathematicæ.

ACcedenti ad Mathematicam opus est imprimis ut intelligat quænam sit Materia quam tractant Mathematici, & de Materia quid sit quod quæritur.

Sciendum ergo est, Materiam quam tractant esse omne id quod habet *Magnitudinem*, id est, quicquid de quo quæri potest quantum sit. Itaq; Materia Scientiarum Mathematicarum sunt corporum *longitudines*, *superficies*, *& crassities*. Habet enim corpus omne tres dimensiones, nec plures, & has genere differentes. Ex motu enim corporis fit longum, quod vocatur *linea*; de inde ex motu lineæ fit *Superficies*; & ex motu Superficiei fit *crassum*, quod & *Solidum* dicitur, & *corpus Mathematicum*. Ulterius procedi non potest, quoniam motu solidi quacunq; movetur, describetur magnitudo solida. Itaq; qui inter genera magnitudinis ponunt surdosolida, quadratoquadrata, &c. ineptè agunt: non enim Figuræ illæ sunt, sed numeri tantùm, id est, non magnitudo, sed magnitudines.

Pertinet etiam ad Mathematicam Motus, Tempus, Vis, Pondus: nam & horum alterum altero majus vel minus esse dici potest. Etiam eousq; tractat Mathematica de Qualitatibus, quatenus alterum altero magis vel minùs tale esse dicitur. De quocunq; enim dici adverbialiter potest, magis aut minus est, fundamentum habet in magnitudine aliqua. Pertinet etiam ad Mathematicam comparatio inter se Magnitudinum, Motuum, Temporum, &c. Nam propter varias rerum *inæqualitates*, una *inæqualitas* major est vel minor alia. Habet igitur *inæqualitas* suam sibi Magnitudinem; atq; ea ipsa est quam vocare solent *Rationem*.

Etiam Numerus ad Mathematicam pertinet. Ad quam enim Scientiam pertinet Corpus, vel Motus, vel Tempus, vel Linea, in Singulari; ad eandem pertinent eadem omnia in Plurali. Cum enim Unum non sit aliud quam *Res numerata*, non erit Numerus aliud quam *Res numeratæ*.

Infinitum autem quantum ſit, nec rogari niſi abſurdè, nec reſponderi omninò poteſt. Neq; verò finita magnitudo dividi in partes numero infinitas, nec numerus infinitus dari poteſt. Quod enim dicant ſæpenumero Mathematiçi, *Producatur linea in Infinitum*, non ita intelligendi ſunt ac ſi fieri id ſentirent poſſe, ſed ut producendam Lectori arbitrio ſuo relinquerent.

De his Mathematicæ ſubjectis id quod quæritur aliud ferè non eſt, quam quanta ſit magnitudo propoſita quatenus comparatur cum magnitudine alia ejuſdem generis; ſive ut uno verbo dicam quæritur Ratio.

Accedenti igitur ad Mathematicam neceſſarium eſt, ut vocabula hæc, & alia omnia quibus Mathematici utuntur accuratè intellecta habeat, id eſt bene & perſpicuè Definita.

Quantitatem (quam veteres nuſquam definierunt, & defectu Definitionis ejus temerè de natura Infiniti diſputantes erraverunt) ego ſic Definio. Quantitas eſt Magnitudo determinata undiquaq; vel per Expoſitionem, ut quærenti quanta ſit reſpondeatur quantam vides, vel per Comparationem; ut reſpondeatur tantam eſſe quantus eſt unus vel plures pedes, vel alio modo ſimili. Sed ſupra omnia, Rationis definitionem habere accuratam debet; & comparationum varietates, & præterea Rationes addere, ſubſtrahere, multiplicare & dividere ſciat. Quæ etſi pleraq; doceantur, ab Euclide & illius interpretibus, reducam tamen ferè omnia ad Caput proximum.

Cognita Materia & quid in illa quærimus, proximum eſt *Principia* ſumere. Cujus rei Principia? Principia Scientiæ, ſive ſciendi id quod quærimus. Sciri autem præter Veritates nihil poteſt. Principia igitur Mathematicæ ſunt *Veritates primæ*, quas non docemur, ſed lumine naturali ſimul agnoſcimus ac proferuntur. Propoſitiones ergo primæ appellantur, quia ex illis primi omnium conſtant Syllogiſmi. Non igitur Scientiæ ſubjectum aut pars ejus aliqua Principium dicendum eſt, ut Punctum Geometriæ, vel Unitas Arithmeticæ, ut Magiſter quidam publicè docuit, etſi Elementorum Euclidis liber primus incipiat a Puncto, & liber ſeptimus ab Unitate.

Principia Mathematicæ ſeu Propoſitiones primæ ſunt Definitiones. Sed eas, ut utiles eſſe poſſint; non modo veras, ſed etiam accuratas eſſe oportet, ne in varietate tanta Significationum, aut per incerta progrediamur, aut perpetuis Diſtinctionibus tramite depulſi perpetuo rixantes veritatem amittamus. Quemadmodum enim in media corona moloſſorum ſi exurgat lepus, emiſſi canes in ſe mutuò ruunt lepuſculo fugiente; ita in Theatro diſputantium qui de victoria certant, veritas neglecta effugit. Et propter hanc cauſam, nempe ad tollendas diſtinctiones, a viris ſapientibus introducta eſt Definitio.

Bene

Bene autem Definire, id eſt rem ſubauditam ita verbis undiquaq; claudere, idq; perſpicuè & quantum fieri poteſt breviter, ut nihil ambigui relinquatur, difficile valde, nec tam Artis quam Intellectus naturalis opus eſt. Sed levamur maxima parte difficultatis hujus induſtria Geometrarum antiquorum; niſi quod Euclidis Definitio Lineæ correctione aliqua, aut ſaltem recta indigeat interpretatione. Verum quidem eſt, quod in comparandis longitudinibus, latitudinis nullam omnino rationem habendam eſſe; in conſtructione tamen figurarum, latitudo neceſſaria eſt; quia ſine latitudine deſcribi figuram impoſſibile eſt. Nec ſciri poteſt in linea lata, linea illa inviſibilis ubi loci intelligi oporteat. Cæteræ quanquam non omnes ſint exactiſſimæ, quia tamen veræ ſunt Propoſitiones, Demonſtrationes ejus non corrumpunt.

Sunt autem Definitiones duorum generum, quorum alterum rei naturam nudè indicat; alterum etiam Cauſam ſive Modum generationis explicat. Illæ autem Definitiones ſunt ad Scientiam promovendam utiliſſimæ quæ cauſas Definiti & modum generandi continent. Verum enim eſt illud Ariſtotelis, *Scire eſt per cauſam ſcire*, cæteræ quæ ſolummodo declarant definiti Eſſentiam, minus fæcundæ ferè ſunt; nihil enim ex illis ſequitur quod non antea in ipſis continebatur; neq; refert utrum proprietates illarum appellentur Definitiones, an Definitiones Proprietates nominentur.

Inter Principia numerari etiam ſolent Petitiones; ſed illæ Sciendi Principia non ſunt, ſed Conſtruendi, id eſt Figurarum deſcriptionis, in quibus nihil requiritur præterquam quod ſint poſſibiles.

Pro Principiis Sciendi habendæ item ſunt Propoſitiones omnes quarum veritas lumine naturali conſpicua eſt. De veritate quidem Definitionis legitimæ, quoniam habent veritatem ſuam a conſenſu & arbitrio hominum rebus explicatis nomina ſuo libitu imponentium, dubitari non poteſt. Sed ſunt Propoſitiones quædam quas etſi à Definitionibus dependeant, & per illas demonſtrari poſſunt, ita tamen perſpicuæ ſunt, ut etiam ſine demonſtratione aſſenſum cogant. Vocantur autem Axiomata. Cavendum autem eſt, ne propter conſenſum ſolum Magiſtrorum pro veris habeantur. Multum enim intereſt inter authoritatem Magiſtri, licet optimi, & lumen naturale. Nihil enim tam abſurdum dictu eſt, quin Magiſter aliquis (erroris alicujus defendendi cauſa) æquè abſurdum aliquando ſcripſerit.

Præcognoſcendus præterea eſt modus Addendi, Subſtrahendi, Multiplicandi, & Dividendi numeros Coſſicos, id eſt *Res numeratas*. Quod facile eſt & docetur à Vieta in Iſagoge, ſed clariſſimè breviſſimè q; ab Oughtredo in Clave Arithmeticæ; unde quantum viſum eſt tranſtuli huc in Caput tertium. Etiam numerorum Quadratorum & Cubicorum &

illorum

illorum Radicum natura & inveniendi modus perdiſcendus eſt. De quo tractatur Capite quarto.

Item natura Anguli præcognita eſſe debet; & propterea proprietates ejus Capite quinto explicavimus. Si quid deniq; a quocunq; Authore bene demonſtratum extet, pro Principio ſi utatur, recte faciet. Omne enim cognitum ad cognitionem ulteriorem Principii vicem obtinet.

Dicet fortaſſe aliquis, Quod totam Geometriam colloco in præcognitis; ſed fallitur: Geometra enim is eſt (ut dixi ſupra) qui quantitatem per comparationem determinare noverit in quantitatibus ejuſdem generis. Illæ autem quas ego præcognoſci velim, ſunt proprietates Geometriæ famulantes tantùm, & gradus quibus Geometriæ altioris Myſteriis initiamur, & quibus indigemus non modo ad figuras & ad opera fabrilia, ſed etiam ad cognitionem cauſarum omnium naturalium, ut quæ in motu omnes continentur.

Principiis & præterea Theorematibus quæ in Geometrarum veterum libris bene demonſtrata extant rectè intellectis (ſcribo enim illis qui ſcientiam augere cupiunt, quoniam gratia operis primis inventoribus debita eſt, & tradita recipere nemo non poteſt niſi qui ſibi videtur eſſe jam doctiſſimus) proximum eſt (non demonſtrare, ſed) quærere proportionis quam habet magnitudo ad magnitudinem, cauſas. Nemo enim demonſtrare poteſt id quod neſcit, nec ſcire niſi quæ invenerit, nec niſi rariſſimè invenire quod non quæſierit. Ars quidem Inveniendi certa nulla eſt. Sagacitate autem (puta) experiendo, ſupponendo, Conſequentias à ſuppoſitis deducendo, pervenietur ſæpiſſimè vel ad cauſas quæſiti, vel ad aliquod impoſſibile. Atq; hac (non Arte, ſed) Sagacitate Geometræ veteres omnes uſi ſunt, ut manifeſtum eſt, ex eo quod Theoremata eorum pleraq; incipiunt à nota Suppoſitionis *Si*. Sed quomodo (inquiet aliquis) ſuppoſitum ſumere illud poteſt quo potiſſimùm opus eſt? Certa quidem Methodus qua Suppoſitiones commodiſſimæ eligantur, habetur nulla. Itaq; circino aliiſq; inſtrumentis menſurando experiendum tentandumq; eſt ut quam proximè poſſimus ad quæſiti veritatem accedere mechanicè. Exempli cauſa, in quærenda longitudine ambitus Circuli (cum lumine naturali ſciant omnes arcum quemlibet majorem eſſe ſua chorda) facile eſt ad veram longitudinem valdè prope accedere. Labor reliquus alius non erit quam propinquitatis tantæ cauſas poſſibiles excogitare. Quod ſi ſuccedat, Principium habent Demonſtrationis. Enimvero in dubiis omnibus, ad varias ſuppoſitiones à natura ipſa cogimur; ut videre eſt in ſervulo illo *Terentiano* in quærendo argento. *Quid ſi hoc ſic incipiam nunc? Nihil eſt. Si ſic? Tantundem egero. At ſic opinor. Non poteſt. Imo optimè. Euge*, &c. Sed Geometræ pleriq; nihil nunc quærunt præterquam an ſit Euclidis; quanquam notiſſimum ſit, tum Theoremata omnium nobiliſſima inventa

ſuiſſe.

fuisse, tum ædificia totius orbis pulcherrima constructa fuisse, multò ante Euclidis tempora. Geometræ autem Hodierni ferè omnes non modo rationes quantitatum, sed etiam Motuum, id est effectuum omnium naturalium causas in una radicum numeralium extractione (& ea falsa) inveniri posse arbitrantur; nimirum ita docti sunt.

Ultimum in Geometria est, inventis rei quæsitæ causis efficientibus, ab illis quasi converso itinere Demonstrare. A causis (inquam) efficientibus, quia proprietatum numericarum causæ plerumq; aliæ non sunt præter impositiones nominum numeralium arbitrarias. Operationes enim Arithmeticæ sunt operum ipsorum demonstrationes.

Cap. II.

De Ratione.

1. Ratio est magnitudinis ad magnitudinem ejusdem generis *Relatio*, secundum quantitatem; ut expositis duabus magnitudinibus 2 & 5, Ratio primæ ad secundum est Relatio quantitatis 2 ad 5; id est quantitas magnitudinis 2 quatenus comparatur cum magnitudine 5. Inæqualitas enim duarum magnitudinum, major vel minor esse potest quam inæqualitas duorum aliorum inæqualium.

2. Itaq; ad exponendam Rationem necessarium est ut exponantur duæ magnitudines absolutæ, quarum prima Antecedens, secunda Consequens appellari solet.

Neq; ergo ambæ quantitates simul ut 2 & 5, neq; una sola, ut 2 vel 5; neq; $\frac{2}{5}$. (Errant ergo Algebristæ nostri qui dicunt Fractionem, & Rationem eandem esse rem.) neq; differentia inter 2 & 5, sed quantitas Inæqualitatis quæ est inter duas magnitudines est id quod vocatur Ratio. Quamvis enim tum 3 & 2, tum 9 & 8 differant tantummodo Unitate, non eadem tamen est earum inæqualitas. Si tamen tres fuerint magnitudines, minima, media, maxima, ratio minimæ ad mediam major est quam ratio ejusdem ad maximam. Contrà verò, ratio maximæ ad mediam minor est quam ratio ejusdem ad minimam. Diceremus enim Teucrum majorem fuisse comparatum ad Ulyssem quam ad Ajacem, & Ajacem minorem fuisse comparatum cum Ulysse quam cum Teucro. Cujus rei causa manifesta est. Nam quanto magnitudo minor propius accedit ad magnitudinem majorem, tanto habet ad illam rationem majorem; & quanto maxima magnitudo minorem magis superat, tanto etiam ad illam majorem habet rationem.

3. Sunt autem rationes minoris ad majus, & majoris ad minus, diversa genera quantitatis, quarum altera est ratio Defectus, altera Excessus; quorum prior quanto magis multiplicatur, tanto semper fit Defectus minor, neq; ergo rationem Excessus unquam superare aut æquare poterit.

4. Eædem sive similes sive æquales Rationes sunt, in numeris quidem, quando sunt cognomines vel ad cognomines reduci possunt; ut si tum prima secundæ, tum tertia quartæ sit $\frac{2}{3}$ vel $\frac{4}{6}$. Ubi vero rationes effabiles per numeros non sunt, tum prima secundæ, tum tertia quartæ sunt latera correspondentia triangulorum similium; vocanturq; proportionalia, quasi habentia portionem pro portione. Græcis autem Ἀναλογον quasi idem iterum dictum.

5. Continuè proportionales sunt quæ proportionales cum sint, habent mediam quantitatem communem, ut 1, 2, 4.

6. Numeri quadrati Radix est ille numerus qui multiplicatus in se numerum aliquem producit. Productus autem numerus dicitur quadratus. Radix autem sui quadrati semper pars est aliquata; ut si Radix sit 8; quadratus erit 64, & Radix pars ejus octava.

7. Manifestum ergo est Radicem numeri quadrati non esse latus quadratæ figuræ, quanquam hoc neget Wallisius & cæteri Algebrittæ, qui veritatem nunc agnoscere sive pudore nequeunt.

8. Si tres magnitudines fuerint continuè proportionales, & ab eadem Antecedente tres aliæ continuè proportionales; ratio ultimæ ad ultimam erit rationis secundæ ad secundam duplicata; ut in his numeris manifestum est, 2. 4. 8. & 2. 6. 18. ratio 18 ad 8 duplicata est rationis 6 ad 4. Nam ut 18 ad 8, ita est 9 ad 4. Sed 9 ad 4 duplicatam habet Rationem 6 ad 4. Elem. 14. Prop. 28.

9. Componuntur, sive simul adduntur duæ Rationes, quando multiplicatis inter se tum Antecedentibus tum Consequentibus fit Ratio. Exempli causa, si Ratio 2 ad 3 addenda sit Rationi 4 ad 5; multiplicentur inter se Antecedentes 2 & 4; faciunt autem 8. Deinde multiplicentur inter se Consequentes 3 & 5; quæ faciunt 15. Quo facto Ratio composita ex Rationibus 2 ad 3, & 4 ad 5, est Ratio 8 ad 15; secundum Encl. El. 6. Def. 5.

10. Aliter, si fiat ut 4 ad 5 ita 3 ad aliam, quæ erit $3\frac{3}{4}$, erit Ratio 2 ad $3\frac{3}{4}$ (id est multiplicatis utrisq; per 4) 8 ad 15 ea quæ componitur ex Rationibus 2 ad 3 & 4 ad 5.

11. Subtractio Rationis a Ratione fit dividendo quantitates Rationis integræ per Antecedentem subducendæ, & Consequentem integræ per utramq; subducendam. Exem. Ratio integra sit 8 ad 15, subducenda 4 ad 5. Divido 8 & 15 per 4. Quotientes sunt 2 & $3\frac{3}{4}$. Rursus divido Consequentem Rationis integræ 15 per ambas quantitates subducendæ, nempe

nempe 4 & 5, Quotientes erunt 3⅓ & 3, quæ ſunt in Ratione 12 ad 15. Poſitis ergo ordine 8, 12, 15. Si a Ratione 8 ad 15 tollatur Ratio 12 ad 15, id eſt 4 ad 5, manifeſtum eſt relinqui rationem 8 ad 12, id eſt 2 ad 3.

12. Aliter. Si fiat ut Conſequens ſubducendæ, quæ eſt 5, ad Antecedentem ſuam 4, ita Conſequens integræ quæ eſt 15 ad aliam 12; poſitis ordine 8, 12, 15, perſpicuum eſt ſubducta ratione 12 ad 15, id eſt 4 ad 5 a Ratione integra 8 ad 15, relinqui 8 ad 12, id eſt 2 ad 3.

13. Multiplicatur Ratio faciendo ut Antecedens ad Conſequentem, ita Conſequentem ad tertiam, & ita tertiam ad quartam, &c.

14. Dividitur Ratio per numerum quando inter Antecedentem & Conſequentem interponitur una vel plures Mediæ proportionales.

15. Si fuerint quotcunq; magnitudines ejuſdem generis, Ratio primæ ad ultimam componitur ex rationibus primæ ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, & ſic deinceps uſq; ad ultimam; ut in numeris quibuſcunq; 4. 9. 10. 3, Ratio 4 ad 3 componitur ex Rationibus 4 ad 9, & 9 ad 10, & 10 ad 3. Quod a pluribus demonſtratum eſt.

16. Eſt autem comparatæ quantitatis genus aliud, quod Ratio etiam dicitur, non Simpliciter, ſed Ratio Arithmetica. Dicuntur enim quatuor quantitates eſſe in Ratione Arithmetica, quando altera alteram perpetuò ſuperat æqualibus differentiis. Circa quam Rationem dicam tantummodo, *Si linea ſecetur in partes æquales tot, in quot ſecari intelligibile eſt, media proportionalis Geometrica inter quaſlibet duas partes proximas erit eadem cum media Arithmetica.* Si ſecetur enim linea data in partes (exempli cauſa) in 2 & 16, media proportionalis Arithmetica erit 7. Itaq; 2. 9. 16, ſunt continuè proportionales Arithmeticæ. Eſt autem media proportionalis Geometrica minor quam 6. Sin linea eadem diviſa eſſet in partes æquales 100000, & media ſumeretur tum Geometrica tum Arithmetica inter totam & partes ejus 99999, quantulam differentiam haberent inter ſe duæ illæ Rationes Geometrica & Arithmetica? Itaq; quo minor eſt differentia inter extremas, eo ubiq; minor eſt differentia inter mediam Geometricam & Arithmeticam. Quare ſi tales mediæ ubiq; interponerentur, differentia earum omnis evaneſceret. Eſt ad inventionem rationum quas habent rectilinea ad curvilinea propoſitio hæc utiliſſima.

CAP.

Cap. III.

De Operationibus Algebrieis.

1. Algebristæ pro rebus, id est, pro magnitudinibus literas quasi Species rerum exponunt, quas addere, substrahere, multiplicare, & dividere docemur hoc modo. Si Species solitariæ sunt ut A & B, adduntur interponendo signum †, quod significat *Plus*. Additis ergo A & B, summa fit A†B. Sin ab A substrahenda sit B, interponunt signum — quod significat Minus, sive mulctam. Itaq; A — B est id quod restat magnitudinis A, postquam ab illa ablata est B. Multiplicatio per numerum est quando numerus multiplicans præfigitur, ut 2 A, 3 A, *&c.* Multiplicatio A per se perficitur scribendo AA vel A*q*. Linea multiplicari in se non potest. Atq; hic primùm discedunt Algebristæ hujus seculi a Diophanto & veteribus, qui intra Arithmeticam se continuerunt. Si multiplicanda sit A in B scribunt AB. Dividi A per B intelligitur si scribatur $\frac{A}{B}$; quod significat Quotientem. Ut si A sit 10, & B 2, signum illud $\frac{A}{B}$ est 5. Optime quidem in numeris. Sed si AA sit figura quadrata & B divisor linea, tunc Quotiens illa $\frac{AA}{B}$ indicat quoties linea B est in quadrata figura AA; quod est alienum a vera Algebra, atq; etiam absurdum. Plana enim non fiunt ex aggregatis lineis.

2. Sin Species signis similibus affectæ sint ut †A†A, illæ simul additæ faciunt 2A. Regula enim est Oughtredi & Algebristarum hæc, eademq; vera, In Additione addendæ sunt Species & apponendum signum commune. Itaq; si addantur — A ad — A, summa erit — 2 A. Sin signa diversa sint tunc regula est hæc, subtrahatur Species a Specie, & residuo præfigatur signum contrarium. Itaq; †A & — A simul addita faciunt *o*, id est nihil.

3. Si vero duæ Species affectæ duabus Speciebus affectis addendæ sunt, Regula talis est. Si signa similia sunt, addantur Species, servatis signis. Sic A†B, & A†B simul addita faciunt 2 A†2 B. Sin signa diversa sint, ut in his †A — B, & — A†B, regula est Aggregentur similiter affectæ sub signis propriis, eritq; summa †A†B — A — B id est nihil.

4. In Subtractione, si Species sint solitariæ, & utraq; habeat signum†, ut †A†B, & subtrahenda sit †B ab †A, residuum est Species unde fit detractio,

tractio, cum signo una cum substracta habente signum contrarium. Nam B detractum ab A relinquit A —— B. Sin ambo signa sint ——, pro residuo sumenda est differentia Specierum cum signo +; ut si ——5 sit deducendum a —— 7, residuum erit + 2. Manifestum enim est, Quod ——5 majus est quam ——7 duabus Unitatibus. Atq; hoc ita esse, homini qui quod dico dignatus fuerit considerare, nemini difficile est intelligere. Quid enim aliud est a magnitudine data defectum tollere quam magnitudinem deficientem qua carebat addere? Itaq; si ab A tollenda sit —— A, manifestum est residuum esse 2 A. Nam eo ipso quod tollitur defectus ponitur accessio ejus quod aberat; non secus quam qui debitum remittit, quantum remittit tantum debitori addit. Consistere me paulisper hoc loco cogit Provocatio Johannis Wallisii in controversia nostra, ad illos qui versati sunt in Algebra, ut intelligant docti quo fretus id fecit.

Est Propositio Wallisii partis primæ libri *De Libra*, octava, in hæc verba: *Contrariorum, quatenus sunt contraria, Aggregatum æquipollet Excessui prepollentis; Aggregatum vero eorundem Summæ*, id est + A —— A æquale est excessui quo + A superat —— A.

Jam + A —— A æquale est 0 sive Nihilo. Oportet igitur magnitudinem A superare magnitudinem —— A Nihilo. Id est, debent + A & —— A esse æqualia, Quod est manifestè absurdum. Ad quos Algebristas poterit ille provocare a quibus non condemnabitur? Quo fretus pronuntiavit, nisi quod sciisset se ad seipsum provocare, cujus authoritatem secutus eos esse judicavit qui Transactionibus Societatis emittendis affidere solent, qui sunt unus aut alter Algebrista e sui ipsius Schola? At quid (inquiet forte aliquis), ab una dormitatione arguere imperitiam artis nonne iniquum est? Iniquum non est nisi erratum paratus sit confiteri. Sed quomodo id facere potest nisi simul totum illum Librum *De Libra* futilem esse (sicut est) confiteatur? Quod ut faciat adduci nunquam potest egregius ille Castigator Hobbii. Sed revertor ad operationes Algebricas. Si plures Species affectæ Signis multiplicandæ sint per unam vel plures Species affectas, Regula hæc est, Si similia fuerint Signa, multiplicatis Speciebus præfigatur signum +; Sin diversa, Signum ——; ut in appositio exemplo.

A + B	A —— B
A + C	A —— C
+ CA + BC	—— CA + BC
+ AA + AB	+ AA —— AB
AA + CA + AB + BC	+ AA —— CA —— AB + BC

Quod quidem in numeris verum est; sed si lineæ sint, falsum. Nihil enim multiplicari potest nisi per numerum.

Species per Species quotcunq; & utcunq; affectæ dividi intelliguntur quando Diviſorem Dividendæ ſubſcribunt. Ut $\frac{A+B}{B-C}$ ſit Quotiens diviſi A+B per B — C. Id quoq; in numeris verum eſt. Sin A+B ſit ſuperficies & B — C linea, abſurdum eſt, ut ſupra obſervavimus. Atq; hoc totum eſt quod in Algebra vocari poteſt Ars. Quod reſtat Labor tantummodo eſt, qui conſiſtit in quærenda Suppoſitione commoda unde incipiant, quod Artis non eſt, ſed palpationis & fortunæ. Cum autem proportionem aliquam invenerint, eam permutando, convertendo, multiplicando, dividendo, componendo, & per ſcalam continuè proportionalium elevando & deprimendo motitant donec in æquationem aliquam, inopinato, & forte fortuna tandem incidatur quæ Problemati Arithmetico poſſit ſatisfacere. Nam ut hac methodo quæſtioni Geometricæ ſatisfiat impoſſibile eſt. Eſt enim Algebra una ex Regulis Arithmeticæ, ad cujus Theoriam perdiſcendam opus eſt biduo aut triduo ut plurimum; quamvis ad promptitudinem operandi opus ſit conſuetudine fortaſſe trium menſium.

CAP. IV.

De quadratis Figuris, & quadratis Numeris.

1. Figura quadrata & Numerus quadratus, quando partes habent quadratas totidem & æquales, eadem eſt res; nam figura tota & numerus partium ejus, idem ſunt.

2. Figuræ quadratæ ſi deſcribantur a Radiis creſcentibus ut numeri ab Unitate in ſerie naturali, differunt inter ſe ut numeri ejuſdem ſeriei Impares. Nempe figura minima eſt una, huic additus proximus numerus impar (qui eſt 3) facit figuram quadratam proximam. (4) Huic rurſus additus numerus impar proximus (5) facit quadratum tertium (9). Et ſic perpetuò. Itaq; Exceſſus Quadratorum dictorum creſcunt ut numeri ab Unitate impares, viz. 1, 3, 5, 7, &c.

3. Si fuerint tres numeri quadrati deinceps proximi, a medio autem auferatur *Unitas*; Numerus qui relinquitur eſt medius proportionalis inter extremos. Exempli cauſa 100. 81. 64, ſunt Numeri quadrati deinceps proximi. Detrahatur *Unitas* ab 81, relinquitur 80, qui medius eſt proportionalis inter extremos 100 & 64. Similiter 49. 36. 25. ſunt Numeri quadrati deinceps proximi. A medio 36 auferatur *Unitas*, reſtat 35 medius proportionalis inter 49 & 25. Item in his 9. 4. 1, Si a medio 4 auferatur 1, reſtat 3 medius inter quadratos 9 & 1. Deniq; 400. 361. 324.

ſunt

ſunt quadrati deinceps proximi. A medio 361 ſi auferatur *Unitas* reſtat 360 medius inter extremos 400 & 324. Et ſic ubique.

4. Inter duas Figuras quadratas proximas, ſi quadrato minimo addatur Radix ſua, totum erit inter ipſas medium proportionale. Nam ſi quadrato 1 addatur Radix ſua (quæ eſt una) totum 2 eſt medium proportionale inter 1 & 4. Similiter ſi quadrato 4 addatur Radix ſua, totum 6 eſt medium proportionale inter 4 & 9. Et ſic perpetuò, ut manifeſtum eſt per Inductionem.

5. Si a quadrato Radix ſua auferatur relinquetur medium inter ipſum & quadratum proximè minus. Sit enim quadrata Figura 100, ſi auferatur inde Radix ejus 10, relinquetur 90, medius proportionalis inter 100 & 81, quadratum proximè minus. Similiter ſi a quadrato 9 auferatur Radix ſua 3, relictus 6 erit medius inter 9 & quadratum proximè inferius 4. Et ſic ſemper.

6. Sin quadrata non ſint proxima ſed intermittant unum, minus quadratum cum duabus radicibus eſt medium inter illa duo quadrata proportionale. Nam ſi quadrato 1 addantur duæ ejus Radices, id eſt 2, fient 3, media proportionalis inter 1 & 9. Item ſi quadrato 4 addantur duæ ejus Radices, id eſt 4, fient 8, medium inter 4 & 16. Et ſic perpetuò. Idem medium habebitur ſi a majore quadrato duæ ejus Radices auferantur. Nam ſi a 16 duæ ejus Radices auferantur, reſtabunt 8, medium inter 16 & 4.

Si deniq; duo quadrata intermittant alia duo, & quadrato minori addatur tripla ſua Radix, habebitur medium inter quadrata extrema. Nam ad quadratum 1 ſi addatur 3 fient 4. medius inter 1 & 16. Vel ſi quadrato 4 addatur tripla ipſius Radix, nempe 6, fient 10 medius proportionalis inter 4 & 25. Vel ſi a 25 auferatur tripla ejus Radix, nempe 15, relinquetur 10 medius inter 25 & 4. Et ita ſemper. Ex quo ſequitur regula generalis, Quod medius proportionalis inter duos quadratos eſt tot Radices minoris cum minore junctæ; vel reſiduum poſt tot Radices a majore ablatas, quot locis in ſerie numerorum naturali majus quadratum diſtat a minore.

7. Manifeſtum hinc eſt Radicem numeri quadrati non eſſe (ut putant Algebriſtæ) quadratæ Figuræ latus, neq; omnino lineam, quia linea plano nihil addit.

8. Si duo quadrata ſint proxima, ea ſimul ſumpta majora ſunt medio duplo, quanta eſt Unitas, ſive Una particula quadrata. Nam 1 & 4 ſunt proxima. Simul ſumpta ſunt 5. Duplum medii eſt 4. Differentia eſt 1. Similiter 100 & 121 ſunt proxima. Simul ſumpta ſunt 221. Medium eſt 110. Duplum medii 220. Differentia 1. Et ſic ubique.

9. Si

9. Si quadrata intermittant unum, extrema simul sumpta majora sunt duplo medio, Quaternario. Nam 1 & 9 intermittunt Unum, simul sumpta sunt 10. Duplum medium est 6. Differentia 4. Item 100. 144, intermittunt Unum. Extrema simul sumpta sunt 244. Medium est 120. Medium duplum 240. Differentia 4. Et sic ubique.

10. Si quadrata intermittant alia duo, extrema simul sumpta majora sunt medio duplo, Novenario. Nam 1 & 16 intermittunt duo. Simul addita sunt 17. Medium duplum est 8. Differentia 9. Item 100 & 49 intermittunt duo. Simul sumpta sunt 149. Medium est 70. Duplum ejus est 140. Differentia 9. Similiter intermissis tribus extrema superant duplum medium Sedenario, & sic deinceps per numeros quadratos, per totam Seriem quadratorum.

11. Inter duos numeros Cubos duo intercedunt numeri medii proportionales. Inveniuntur autem hoc modo. Si Cubi sint proximi dividatur Cubus minor per suam Radicem; deinde multiplicetur Quotiens per numerum qui radicem Unitate superat. Productus erit mediorum minor. Exemp. Sint Cubi 1 & 8 proximi. Dividatur Cubus minor 1 per suam radicem 1. Quotiens erit 1. Deinde multiplica 1, per 1 plus 1 id est 2. Numerus hic 2 est minor mediorum inter 2 & 8. Mediorum major invenitur eadem methodo. Diviso 2 per 1 fit Quotiens 2. Multiplicato deinde 2 per 1 plus 1 fit major mediorum 4. Postremò, diviso 4 per 1 Quotiens est 4, & multiplicato 4 per 1 plus 1 fit 8. Vel sit Cubus minor 64, radix ejus 4, Cubus proximè major 125. Diviso 64 per 4 Quotiens est 16. Multiplicato 16 per 4 plus 1 fit 80 mediorum primus. Rursus diviso 80 per 4, Quotiens est 20; qui multiplicatus per 4 plus 1 facit 100 medium majorem. Postremò si dividatur 100 per 4 Quotiens erit 25, qui multiplicatus per 4 plus 1 facit 125.

12. Si duo numeri Cubi intermittant unum numerum Cubum; dividatur Cubus minor per suam Radicem, & multiplicetur Quotiens per Radicem plus 2, productus erit minor mediorum. Sint Cubi 1, 27. Diviso 1 per 1 Quotiens est 1, qui multiplicatus per 1 plus 2 facit 3 minorem mediorum. Rursus 3 divisus per 1 est 3, multiplicatus autem 3 per 1 plus 2 facit 9 majorem mediorum. Postremò, 9 divisus per 1 est 9 qui multiplicatus per 1 plus 2 est 27.

13. Similiter si Cubi sunt 8 & 64, diviso 8 per suam Radicem 2. Quotiens est 4; & 4 multiplicatus per 2 plus 2 facit 16 medium primum; & diviso 16 per 2 fit 8, qui multiplicatus per 2 plus 2 facit 32 medium secundum. Deniq; 32 diviso per 2 Quotiens est 16, qui multiplicatus per 2 plus 2 facit 64. Similiter si Cubi sint 27 & 125, diviso 27 per 3 Quotiens est 9, qui multiplicatus per 3 plus 2 facit 45 medium primum. Rursus diviso 45 per 3 Quotiens est 15, qui multiplicatus per 3 plus 2 est 75; &

75 diviso per 3 Quotiens est 25, & hic multiplicatus per 3 plus 2 facit 125, & sic semper in Cubis intermittentibus unum.

Si duo numeri Cubi intermittant duos numeros Cubos, diviso minore per suam Radicem, Quotiens multiplicatus per Radicem plus 3 dabit medium primum. Sint Cubi 27 & 216 intermittentes Cubos duos (nempe 64 & 125) diviso 27 per suam Radicem Quotiens est 9, qui multiplicans Radicem 3 plus 3 facit 54 medium primum. Diviso 54 per 3 fit 18, qui multiplicatus per 3 plus 3 facit 108. Postremò, diviso 108 per 3 Quotiens erit 36, qui multiplicatus per 3 plus 3 facit 216.

Si duo numeri Cubi intermittant tres numeros Cubos, & Cubus minor dividatur per suam Radicem, & Quotiens multiplicetur per illam Radicem plus 4, productus erit mediorum primus. Et sic per omnes Cubos numerorum qui sunt in serie naturali, additis 5, 6, 7, &c. invenientur medii primi inter duos Cubos quoscunque.

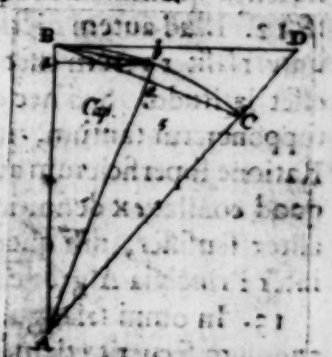
CAP. V.

De Angulis.

1. ANgulus rectilineus est digressio duarum rectarum ab eodem puncto in circumferentia.

2. Quantitas Anguli rectilinei est quantitas Rationis quam habet circumferentia intercepta ad circuli perimetrum.

3. Anguli ergo quantitas non est linea, neq; superficies, neq; solidum, sed quantitas Rationis quam habet revolutio Radii ad alteram ejusdem revolutionem.



4. Chorda anguli, circumferentiæ, vel arcus, est recta linea quæ conjungit duo quælibet circumferentiæ, puncta; ut si rectæ sint ab eodem puncto AB, A*b*, AC; & angulus ABD rectus; arcus autem B*b*C. Tunc recta BC est chorda sive subtensa arcus BC, & recta B*b* chorda arcus B*b*.

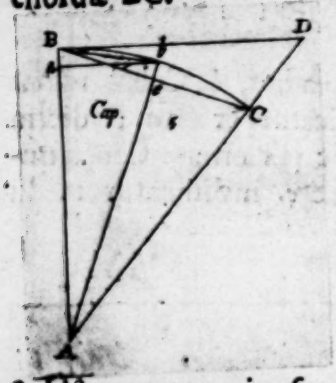
5. Sinus rectus circumferentiæ est recta ducta ab uno termino circumferentiæ ad Radium qui transit per terminum alterum perpendiculariter. Ut Be vel *ab* est Sinus rectus arcus B*b*.

6. Secans arcus vel circumferentiæ est recta e centro ducta per unum terminum arcus ad rectam quæ perpendicularis ducitur in termino altero ad Radium. Ut AD est Secans arcus BC.

7. Tangens

7. Tangens arcûs eſt quæ intercipitur pars rectæ illius quæ ducitur ab initio arcus perpendiculariter. Ut BD eſt Tangens arcus BC vel anguli ABC.

8. Manifeſtum hinc eſt Sinum rectum arcus cujuſcunq; eſſe dimidium chordæ arcus dupli, ſive chordam arcus, æqualem eſſe duplo Sinui recto arcus dimidii. Ut ſi arcus B*b* ſit ſemiſſis arcus BC, erit dupla *ab* æqualis chordæ BC.



9. Arcus minor ad ſuam chordam, minorem habet rationem quam arcus major ad ſuam. Nam ratio arcus BC ad chordam ſuam BC eadem eſt quæ B*b* dimidii arcus BC ad dimidiam chordam B*e*. Sed chorda arcus dimidii BC eſt recta B*b*, quæ major eſt quam B*e*. Ergo (per Cap. 1. Num. 2.) minor eſt ratio arcus minoris B*b* ad ſuam chordam B*b*, quam arcus majoris BC ad BC chordam ſuam.

10. Sequitur hinc, ſi arcus B*b* fuerit biſectus, & biſegmentum ejus fuerit rurſus biſectum, & ſic perpetuò quoties fieri poteſt, fore ut perveniatur tandem ad ſegmentum arcus, cujus exceſſus ſupra chordam propriam minor ſit omni longitudine data; & (per conſequens) minor latitudine lineæ cujuſcunq; latitudinem habentis quantulamcunque.

11. Similiter, ſi linea recta biſecetur, & biſegmenta ejus rurſus biſecentur quoties fieri poteſt, pervenietur tandem ad ſegmentum minus omni quantitate aſſignabili, & proinde minus quam latitudo lineæ latitudinem habentis quantulamcunque.

12. Illud autem dictum univerſale, *Arcus omnis Major eſt ſua chorda*, univerſaliter verum eſſet, ſi daretur arcus circuli, & linea recta, cujus nulla eſſet latitudo. Sed nec datur linea ſine latitudine, neq; ſi daretur, aut ſupponeretur tantùm, intrare poſſet in demonſtrationem, ubi agitur de Ratione ſuperficierum aut ſolidorum; quia ſunt diverſa genera quantitatis; quod conſtat ex definitione quinta El. 5. Euclidis. Nec Walliſius (puto) aliter ſenſiſſet, niſi quod Definitio illa in Oughtredi Clave Arithmeticæ inter Principia Algebræ non inveniatur.

13. In omni triangulo ſi angulus ſectus ſit bifariam, & recta quæ ſecat angulum ſecuerit etiam baſem; Segmenta baſis erunt in ratione laterum. Eſt Eucl. El. 6. Prop. 3. perſpicuè demonſtrata.

14. Eſt aliud genus anguli plani quem vocant angulum Contactus, qui eſt angulus quem facit recta BD cum arcu BC in puncto B. Quem Euclides (vel ejus interpres Theon) & plurimi eum ſequuti majorem quidem eſſe dixerunt omni angulo Acuto; Angulum autem quem facit A B cum eodem

arcu

arcu BC omni angulo acuto majorem, minorem tamen recto; id quod (ſiquidem angulus contactus, ut vult Walliſius ejuſdem eſſet generis cum angulo qui fit a revolutione Radii) eſt manifeſtè abſurdum. Nam omnis angulus non Obtuſus aut Rectus eſt, aut Recto minor, tanto quantus eſt aliquis angulus acutus.

Fefellit eos primò quod ſpatium inter rectam BD & arcum BC credideriint eſſe angulum; quod (per Num. 3. capitis hujus) falſum eſt. Fefellit illos etiam, quod putarent angulos iſtos quantitates eſſe ejuſdem generis; quod falſum eſt, quia angulus Contactus utcunq; multiplicatus angulum factum ex circulatione Radii ſuperare aut æquare nunquam poteſt.

15. Si verum eſſet angulum factum a recta AB cum arcu BC recto minorem eſſe, fieri poſſet ut angulus Acutus uniformiter creſcendo major tandem evaderet Recto, nunquam tamen illi æqualis eſſet; quæ abſurda ex eo nata ſunt, quod putarent lineam nullam habere latitudinem; nec Signum, ullam omnino quantitatem.

16. Quod Angulus in centro, Anguli in circumferentia (ſi æqualibus inſiſtant arcubus) duplus ſit, demonſtratur ab Euclide El. 3. Prop. 20. Notandum autem, ad eſſentiam Anguli in circumferentia non requiri ut crura ambo terminentur in circumferentia. Nam angulus in circumferentia eſt DBC, etſi punctum D in circumferentia non ſit.

Cap. VI.

De Ratione perimetri ad Radium Circuli.

1. Arcus Quadrantalis æqualis eſt Radio una cum Tangente 30 graduum.

Sit Radius AB, ſemiradius BE, vel AF. Ducta ergo EF, erit rectangulum ABEF dimidium Quadrati a Radio AB. Deſcribatur Radio AB arcus BG ſecans EF in G. Ducta ergo AG & producta ad BE productam in H, erit BH Tangens 30 graduum, & BG tertia pars arcus quadrantalis deſcripti ab AB. Deinde a puncto G ad latus AB ducatur perpendicularis GI. In producta BA ſumatur AN dupla AI, ut IN ſit tripla IA. Ducatur deniq; NG ſecans AF in T, & producatur ad BH in *q*.

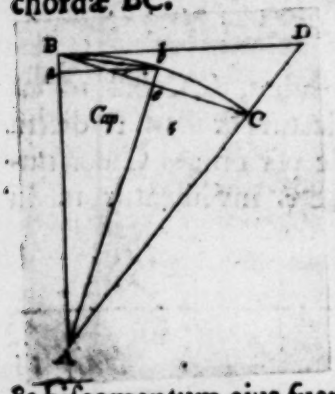
Dico B*q* rectam æqualem eſſe arcui BG.

Super AT deſcribatur arcus quadrantalis ST. Quoniam ergo triangula NIG, NAT ſunt ſimilia, erit AT duæ tertiæ rectæ GI ſemiradii, id eſt tertia pars totius Radii.

Quoniam

7. Tangens arcûs eſt quæ intercipitur pars rectæ illius quæ ducitur ab initio arcus perpendiculariter. Ut BD eſt Tangens arcus BC vel anguli ABC.

8. Manifeſtum hinc eſt Sinum rectum arcus cujuſcunq; eſſe dimidium chordæ arcus dupli, ſive chordam arcus, æqualem eſſe duplo Sinui recto arcus dimidii. Ut ſi arcus B*b* ſit ſemiſſis arcus BC, erit dupla *ab* æqualis chordæ BC.



9. Arcus minor ad ſuam chordam, minorem habet rationem quam arcus major ad ſuam. Nam ratio arcus BC ad chordam ſuam BC eadem eſt quæ B*b* dimidii arcus BC ad dimidiam chordam B*e*. Sed chorda arcus dimidii BC eſt recta B*b*, quæ major eſt quam B*e*. Ergo (per Cap. 1. Num. 2.) minor eſt ratio arcus minoris B*b* ad ſuam chordam B*b*, quam arcus majoris BC ad BC chordam ſuam.

10. Sequitur hinc, ſi arcus B*b* fuerit biſectus, & biſegmentum ejus fuerit rurſus biſectum, & ſic perpetuò quoties fieri poteſt, fore ut perveniatur tandem ad ſegmentum arcus, cujus exceſſus ſupra chordam propriam minor ſit omni longitudine data; & (per conſequens) minor latitudine lineæ cujuſcunq; latitudinem habentis quantulamcunque.

11. Similiter, ſi linea recta biſecetur, & biſegmenta ejus rurſus biſecentur quoties fieri poteſt, pervenietur tandem ad ſegmentum minus omni quantitate aſſignabili, & proinde minus quam latitudo lineæ latitudinem habentis quantulamcunque.

12. Illud autem dictum univerſale, *Arcus omnis Major eſt ſua chordæ*, univerſaliter verum eſſet, ſi daretur arcus circuli, & linea recta, cujus nulla eſſet latitudo. Sed nec datur linea ſine latitudine, neq; ſi daretur, aut ſupponeretur tantùm, intrare poſſet in demonſtrationem, ubi agitur de Ratione ſuperficierum aut ſolidorum; quia ſunt diverſa genera quantitatis; quod conſtat ex definitione quinta El. 5. Euclidis. Nec Walliſius (puto) aliter ſenſiſſet, niſi quod Definitio illa in Oughtredi Clave Arithmeticæ inter Principia Algebræ non inveniatur.

13. In omni triangulo ſi angulus ſectus ſit bifariam, & recta quæ ſecat angulum ſecuerit etiam baſem; Segmenta baſis erunt in ratione laterum. Eſt Eucl. El. 6. Prop. 3. perſpicuè demonſtrata.

14. Eſt aliud genus anguli plani quem vocant angulum Contactus, qui eſt angulus quem facit recta BD cum arcu BC in puncto B. Quem Euclides (vel ejus interpres Theon) & plurimi eum ſequuti majorem quidem eſſe dixerunt omni angulo Acuto; Angulum autem quem facit A B cum eodem

arcu

arcu BC omni angulo acuto majorem, minorem tamen recto; id quod (ſiquidem angulus contactus, ut vult Walliſius ejuſdem eſſet generis cum angulo qui fit a revolutione Radii) eſt manifeſtè abſurdum. Nam omnis angulus non Obtuſus aut Rectus eſt, aut Recto minor, tanto quantus eſt aliquis angulus acutus.

Feſellit eos primò quod ſpatium inter rectam BD & arcum BC credideriint eſſe angulum; quod (per Num. 3. capitis hujus) falſum eſt. Feſellit illos etiam, quod putarent angulos iſtos quantitates eſſe ejuſdem generis; quod falſum eſt, quia angulus Contactus utcunq; multiplicatus angulum factum ex circulatione Radii ſuperare aut æquare nunquam poteſt.

15. Si verum eſſet angulum factum a recta AB cum arcu BC recto minorem eſſe, fieri poſſet ut angulus Acutus uniformiter creſcendo major tandem evaderet Recto, nunquam tamen illi æqualis eſſet; quæ abſurda ex eo nata ſunt, quod putarent lineam nullam habere latitudinem; nec Signum, ullam omnino quantitatem.

16. Quod Angulus in centro, Anguli in circumferentia (ſi æqualibus inſiſtant arcubus) duplus ſit, demonſtratur ab Euclide El. 3. Prop. 20. Notandum autem, ad eſſentiam Anguli in circumferentia non requiri ut crura ambo terminentur in circumferentia. Nam angulus in circumferentia eſt DBC, etſi punctum D in circumferentia non ſit.

Cap. VI.

De Ratione perimetri ad Radium Circuli.

1. Arcus Quadrantalis æqualis eſt Radio una cum Tangente 30 graduum.

Sit Radius AB, ſemiradius BE, vel AF. Ducta ergo EF, erit rectangulum ABEF dimidium Quadrati a Radio AB. Deſcribatur Radio AB arcus BG ſecans EF in G. Ducta ergo AG & producta ad BE productam in H, erit BH Tangens 30 graduum, & BG tertia pars arcus quadrantalis deſcripti ab AB. Deinde a puncto G ad latus AB ducatur perpendicularis GI. In producta BA ſumatur AN dupla AI, ut IN ſit tripla IA. Ducatur deniq; NG ſecans AF in T, & producatur ad BH in *q*.

Dico *Eq* rectam æqualem eſſe arcui BG.

Super AT deſcribatur arcus quadrantalis ST. Quoniam ergo triangula NIG, NAT ſunt ſimilia, erit AT duæ tertiæ rectæ GI ſemiradii, id eſt tertia pars totius Radii.

Quoniam

Quoniam ergo AT est tertia pars Radii, erit arcus ST æqualis arcui BG. Secetur BG bifariam in *i*, & AT bifariam in M, ducaturq; *ib* perpendicularis ad AB, eritq; AM sexta pars Radii AB, & arcus YM æqualis arcui B*i*; & ut N*b* ad NA, ita erit *bi* ad AM. Ducta ergo NM & producta transibit per *i*; producatur autem ad BH in Q. Producatur autem *bi* ad concursum cum N*q* in *t*; eritq; *bt* dupla *bi*, & æqualis chordæ arcus BG. Est enim Sinus rectus dimidii arcus cujuslibet semissis chordæ dupli arcus. Rursus bisecetur arcus B*i* in *e* & AM in L, ducaturq; *ea* ad AB perpendicularis, eritq; *ea* dimidia chorda arcus B*i*, & quarta pars duarum chordarum arcuum B*i* & *i*G. Sit autem & AL quarta pars rectæ AT. Ducta ergo NL & producta transibit per *e*; producatur autem ad BH in P. Ergo arcus KL æqualis est arcui B*e*, similiter si MT divisa sit bifariam in X, ducta NX & producta secabit arcum BG in *o*, ita ut *o*G sit quarta pars arcus BG, & arcus quadrantalis VX æqualis erit arcui B*o*. Et sic perpetuò. Rectæ igitur quæ ducuntur a puncto N dividunt tum rectas AT, B*q*, tum arcum BG in easdem rationes.

Si ergo bisectio continuetur quantum potest, pervenietur tandem ad arcum circuli minorem quam est latitudo lineæ sive lateris AB. Item per Cap. 5. Num. 9. ratio arcus ad chordam semper decrescit. Quare differentia arcus ad suam chordam decrescet etiam donec minor fuerit omni differentia assignabili.

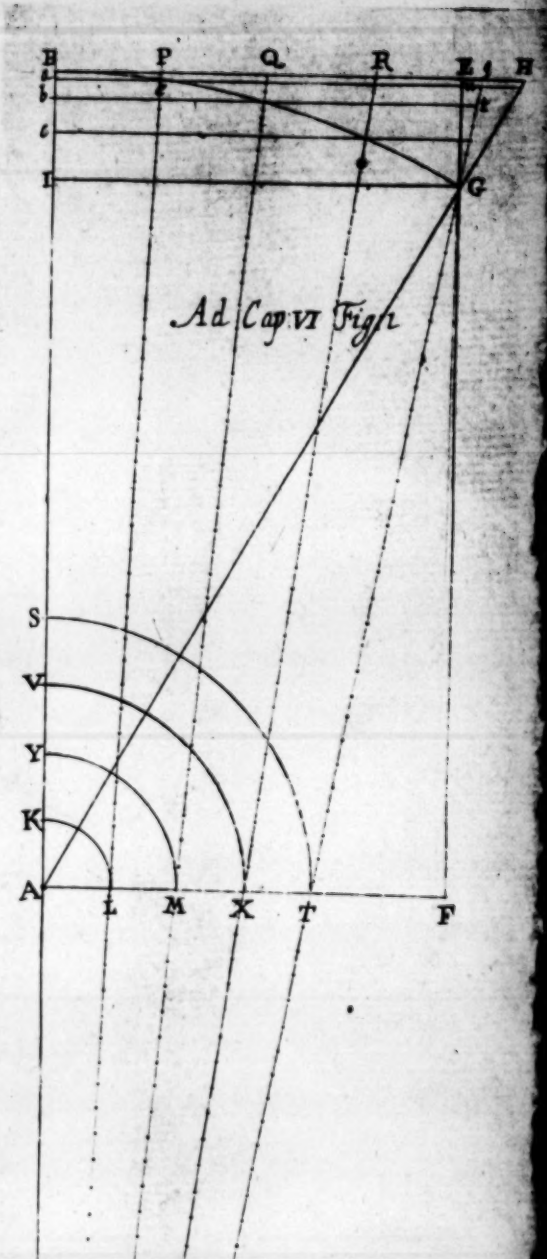
Supponatur ergo segmento minimo æqualem esse latitudinem Radii AB ~~vel minor illa (nunquam autem fiet bisecando ut reducatur in nihilum)~~; erit ultimum & minimum segmentum in recta BH ad *q*; & sic perpetuò segmenta arcus BG omnia æqualia jacebunt extensa in rectam B*q*. Nam B*q* major est quam *bt*, quæ æqualis est chordæ arcus BG. Producatur *ae* ad occursum cum N*q* in *s*; & erit *as* æqualis quatuor chordis arcus B*e*, sed minor tota B*q*. Similiter si arcus *ae* bisecetur, & Sinus rectus ejus ducatur, ille productus ad occursum cum recta N*q*, æqualis erit octo chordis arcus *ae*, minor tamen recta B*q*; & sic semper, donec ventum sit ad segmentum ultimum & minimum, cujus longitudo æqualis est latitudini radii AB.

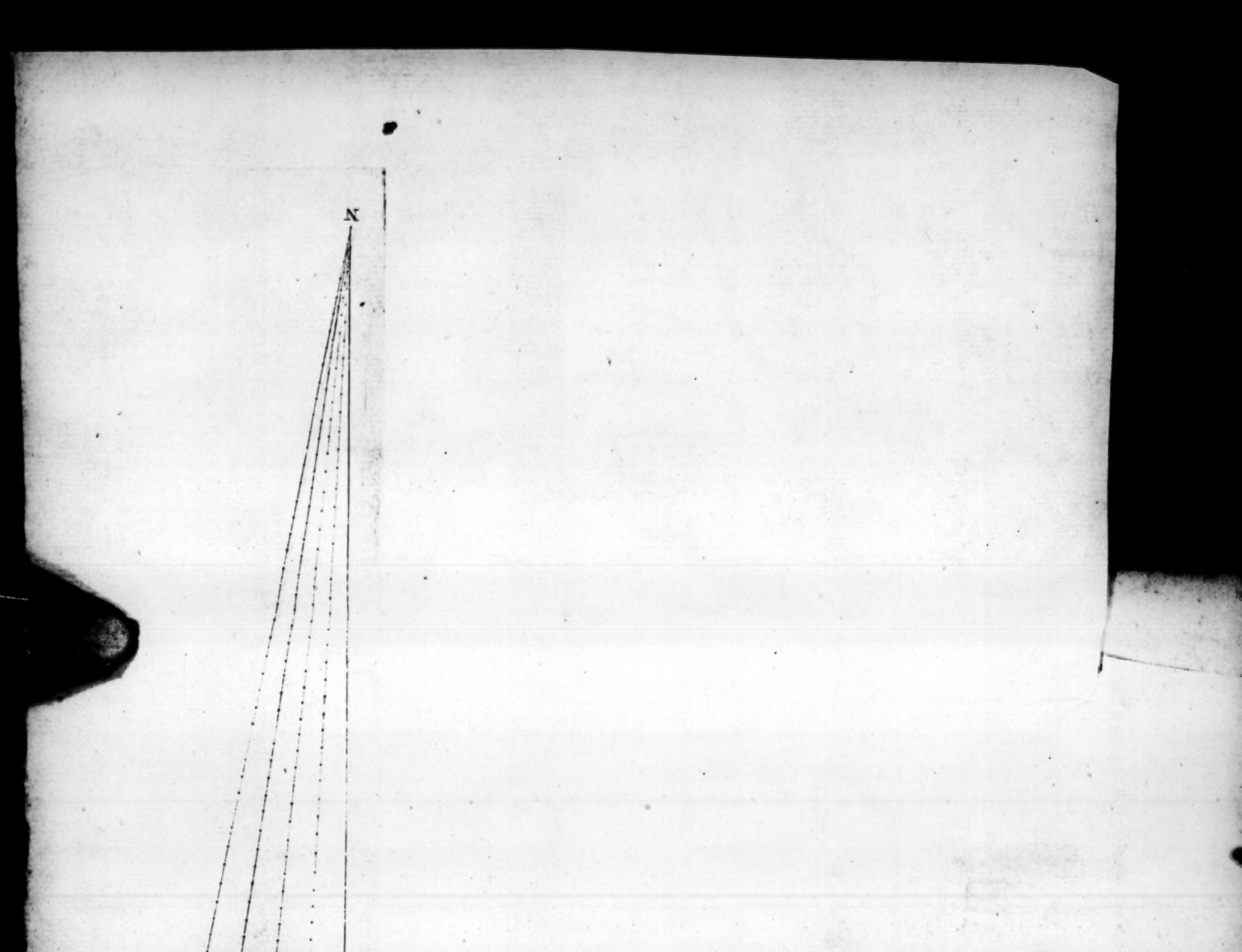
Itaq; si lateri AB concedatur latitudo quantulacunq; erunt arcus BG & recta B*q* æquales. Sin lineæ negetur latitudo omnis, non modo pars arcus quantulacunq; major erit sua chorda, sed etiam partes ejus omnes omnibus, ita ut nullus arcus rectæ æqualis esse possit. Sed neq; ulla erit linea ducta, neq; Sinus, neq; arcus aut figura. Linea enim sine Latitudine *Nihil* est, & dimidium ejus tantundem.

Est ergo B*q* æqualis arcui BG, id est tertiæ parti arcus quadrantalis descripti Radio AB.

Quoniam

I
L
Y
Z


H
P
Q
R
L
H
a
b
c
I
G
Ad Cap. VI Fig. I
S
V
Y
K
A
L
M
X
T
F


N

Quoniam
Secetur
cularis
Bi, &
transibit
concurſi
Eſt enim
Rurſus
cularis,
rum arc
ergo NL
arcus K
ducta Ni
BG, &
Rectæ ig
arcum B

Si ergo
arcum ci
Cap. 5.
rentia ar
differenti

Suppo
vel mino
erit ultim
ſegmenta
Bq major
ad occurſi
ſed mino
ducatur,

recta B
arcus quam
omnibus,
linea duct
Nihil eſt,

Eſt ergo
deſcripti R

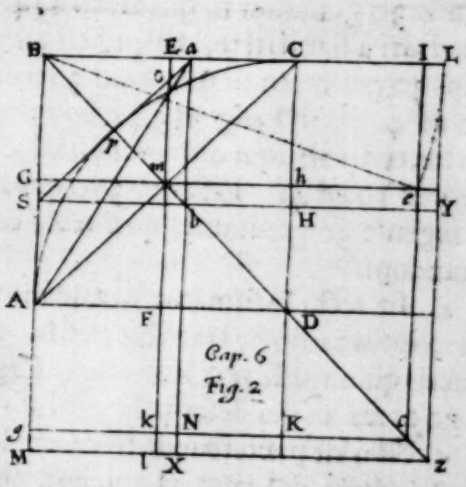
Quoniam autem triangula GTF, EG*q* ſunt rectangula & ſimilia; & TF tertia pars ſemiradii AF, erit E*q* tertia pars EH (exceſſus Tangentis BH ſupra ſemiradium BE.) Tripla ergo B*q* (id eſt arcus quadrantalis deſcriptus radio AB æqualis eſt triplo ſemiradio una cum tripla E*q*, id eſt Radio AB una cum Tangente 30 graduum, hoc eſt una cum BH. Quod erat demonſtrandum.

2. Si produceretur B*q* donec triplicaretur, & AF donec duplicaretur, manifeſtum eſt rectam ductam a puncto N per terminum duplicatæ AF, abſciſſuram eſſe in recta BH producta rectam æqualem compoſitæ ex Radio & Tangente 30 graduum. Sed ut recta ducta a puncto N tranſiens AD productam, dividat etiam id quod reſtat arcus totius per BG proportionaliter, impoſſibile eſt; quia ſi duceretur per punctum G, Tangens ad punctum G, recta GA producta donec æqualis eſſet rectæ BN faceret idem quod BN; & propterea rectæ a puncto N per reliquam partem arcus, id non facerent.

Scholium.

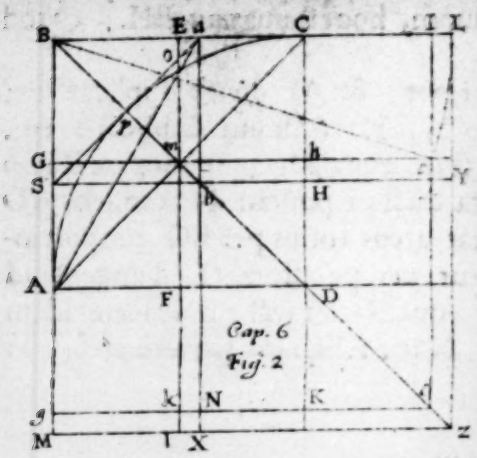
3. Quoniam arcum quadrantalem (in Roſeto) æqualem oſtendi eſſe rectæ cujus quadratum decuplum eſt quadrati a ſemiradio; & eundem nunc arcum æqualem eſſe rectæ compoſitæ ex Radio & Tangente 30 graduum; demonſtrabo hoc loco, ex Principiis clariſſimis, quadratum a recta illa compoſita ex Radio & Tangente 30 graduum etiam decuplum eſſe quadrati a ſemiradio.

Deſcribatur Quadratum ABCD, ſeceturq; quadrifariam tum a rectis EF, G*b*, tum a diagonalibus AC, BD concurrentibus in centro quadrati ad *m*; & deſcribatur arcus AC ſecans EF in O, & producatur ad latus BC in *a*. Eſt ergo B*a* Tangens 30 graduum. Producatur latus BC, & in producto ſumatur CI æqualis ſemilateri BE, & CL æqualis Tangenti B*a*. Deinde deſcribatur quadratum a tota BL, quod ſit BL ZM, quod demonſtrandum eſt æquale eſſe decem quadratis a BE vel CI.



Quadratum a BE eſt BE*m*G. Quadratum a Tangente B*a* eſt B*ab*GS, cui fiat æquale CLYH*b*.

Deſcribatur etiam quadratum a BI, quod ſit Bleg, & producantur GD, EF, ad latus MZ ſecantes ge in K & k. Producatur item *ab* ad latus MZ in X & SH ad LZ in Y.



Intelligatur jam quatuor latera quadrati ABCD diviſa eſſe ſingula in duodecem partes æquales. Ita enim fiet ut quadratum ABCD contineat quadratula æqualia 144.

Quoniam latus BC eſt 12, latus BI eſt 18. Illius quadratum eſt 144, hujus 324. Quadratum autem a 19 eſt 361. Quadratum a 20 eſt 400; atq; hi numeri quadrati ſunt deinceps proximi. Quare (per cap. hujus 4 Num. 3.) dempta Unitate a medio quadrato 361, reliquus 360. eſt medius proportionalis inter 400 & 324; id eſt Radix numeri quadrati a 400 multiplicato in 324.

Rurſus quia BC eſt 12; ſemilatus BE eſt 6, qui quadratus eſt 36. Quadratus autem a 7 eſt 49. Quadratus ab 8 eſt 64; & hi quadrati ſunt deinceps proximi. Quare (per cap. hujus 4, num. eundem) dempta Unitate a medio quadrato 49. relinquitur 48 medius proportionalis inter 64 & 36, ſive Radix numeri 64 multiplicati in 36. Eſt autem 48 quadratum Tangentis 30 graduum in quadrato 144. Quoniam autem 360 decuplum eſt quadrati a ſemilatere, BE, id eſt ad quadratum 144, ut 10 ad 4; Tangens 30 graduum in quadrato 360 erit ad quadratum Tangentis etiam ut 10 ad 4. Sed Tangens 30 graduum in quadrato 360, nimirum pars ejus tertia, eſt 120, qui numerus eſt ad 48 quadratum Tangentis in quadrato 144 ut 10 ad 4. Eſt ergo 360 quadratum a recta compoſita ex radio & Tangente 30 graduum, quæ recta compoſita eſt BL. Quod erat demonſtrandum.

4. In recta Ie ſumatur Ie æqualis rectæ CI, & juncta BE, arcus circuli deſcriptus radio Be tranſibit per L, nam BI poteſt novem quadrata ſemilateris quorum Ie poteſt unum. Ergo Be poteſt decem ſemilatera; tranſit ergo arcus ab illa deſcriptus per L.

5. Non eſt prætereunda hoc loco difficultas quædam quam Cap. 23. *Libri de Principiis*, &c. notavi quidem, ſolvendam autem Lectoribus relinquere viſum erat. Hujus ſolutio illuminandæ facilitandæq; Geometriæ valde expedibit. Difficultas ea hæc eſt, Quadratum CLYH (quod eſt Quadratum Tangentis 30 graduum, & æquale, per conſtructionem, B*ab*S) eſt ad quadratum Cl*eb* ut 4 ad 3, ut vulgo notum eſt. Quoniam ergo Gnomon

mon ILZ*eb*M æqualis esse debet triplo Gnomoni ILY*eb*H. Et propterea Gnomon ille triplicatus & huic superpositus congruere. Sed non congruit, nam minor est. Videtur hinc concludi posse latus quadrati quod sit decuplum quadrati a Semilatere, majus esse quam quadratum a BL. Quare autem? Quia minus est quantum est duplum quadratulum *mb*, vel *c*Z, vel *e*Y.

Nam supposito rectam BC divisam esse in duodecem partes æquales, totum quadratum ABCD erit illarum partium 144; quadratum CIYH, 48; item quadratum AX, 48; & quadratum DZ, 48. Hæc omnia sunt 288. Quoniam autem quadratum a CI semilatere, est 36, totum quadratum (quod est ejus decuplum) debet esse 360. Dempto igitur 288 a 360, reliquum 72 debet esse æquale duobus rectangulis æqualibus XD & DY, & utrumvis debet esse 36; sed non est. Est enim quadratum FDK*k* æquale quadrato a BE vel CI (id est 36) a quo si auferatur rectangulum F*l*, & addatur rectangulum XK (cum illud majus sit quam hoc quantum est quadratum *k*X) reliquum rectangulum XD minus erit quam quadratum FK, id est quam 36, quantum est quadratum *k*X vel *c*Z; propter eandem causam rectangulum DY minus etiam est quam 36, quantum est quadratum *e*Y vel *c*Z. Est ergo totum quadratum BLZM minus quam decuplum quadrati a semilatere, quod est 36, quantum est duplum quadratulum *c*Z.

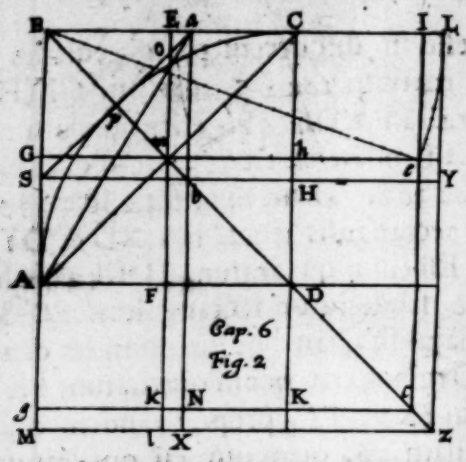
Quid ad hæc responderi potest? Si in demonstratione priore locus sit reprehensioni, sane nihil. Sed illa mere Arithmetica est, ubi labi minus pronum est.

Itaq; objectionem primò invalidam esse ostendam; deinde differentia illa dupli quadratuli *c*Z unde nascitur.

Quod invalida est, manifestum hinc erit, Quod eodem argumento probari potest (supposito rectam BC divisam esse in duodecem partes æquales) quadratum ejus etiam minus esse quam 144, quantum est idem ipsum duplum quadratum *c*Z. Cum enim quadratum C*m* sit 36, rectangulum C*ab*H minus erit illo quantum est Quadratum *bm*, sive *c*Z. Tollitur enim a quadrato C*m*, ex una parte complementum E*b*, ex altera parte *bb*. Sed E*b* majus est quam *bb* quadrato *bm*. Est igitur rectangulum C*ab*H minus quam 36, eodem quadratulo *c*Z. Propter eandem causam rectangulum A*b* minus est quam 36, quadratulo eodem *c*Z. Restat ad Quadratum totum complendum, quadratum *b*D, quod est dimidium quadrati a Tangente B*a*. Junctâ enim *a*S secante diagonalem in *p*, erit ut S*a*, sive B*b* ad B*a*, ita B*a* ad *bp*, id est ad H*b*. Est ergo *ab* media proportionalis inter B*b*, & *b*H. Est ergo quadratum *b*D dimidium quadrati B*ab*S, id est 24. Quadratum ergo totum 144 æquale est 48†24†36†36 minus duplo quadrato *c*Z, quod est absurdum. Dubitari enim non potest quin quadratum

tum ABCD sit 144. Invalida ergo est objectio, & hoc præterea habet vitii, quod quadratum a BL minus faciat quam 360, non duplo, sed quadruplo quadrato cZ.

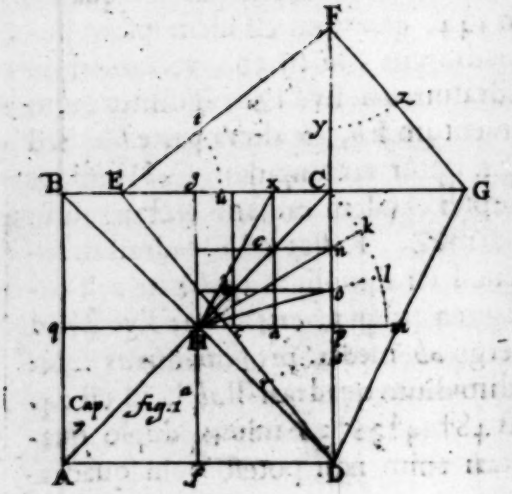
Quærenda ergo est discordiæ hujus causa. Ea autem alia esse non potest quam computatio linearum sine latitudine in rationibus superficierum,



unde necessariò sequitur id quod continetur intra quatuor latera BL, LZ, ZM, MB minus esse decem quadratis a BE, quantum est duplum cZ; latera autem ipsa quadruplo cZ esse æqualia. Quadratum ergo a BL decuplum esse quadrati a semilatera manet inconcussum & manebit; nullo enim argumento probari potest, quadratum a BL minus esse decuplo quadrato a BE, quin eodem probabitur quadratum a BC minus esse quatuor quadratis ejusdem BE. Impedimentum ergo Geometriæ unum per hujus difficultatis solutionem, & fortasse maximum sustulimus, nimirum computationem superficierum per lineas sine latitudine.

CAP. VII.

De Mediis Proportionalibus.



1. INter duas rectas datas Mediam invenire Proportionalem, docetur ab Euclide El. 6. Prop. 13.

2. Inter datam rectam & ipsius semissem invenire duas Medias Proportionales. Sit data recta DC & ipsius semissis CG. Disponantur autem ad angulos rectos in C. Deinde fiat quadratum DABC, secenturq; tum a diagonalibus AC, BD tum a rectis *ef*, *qp* concurrentibus in H, quadrifariam. Sumatur

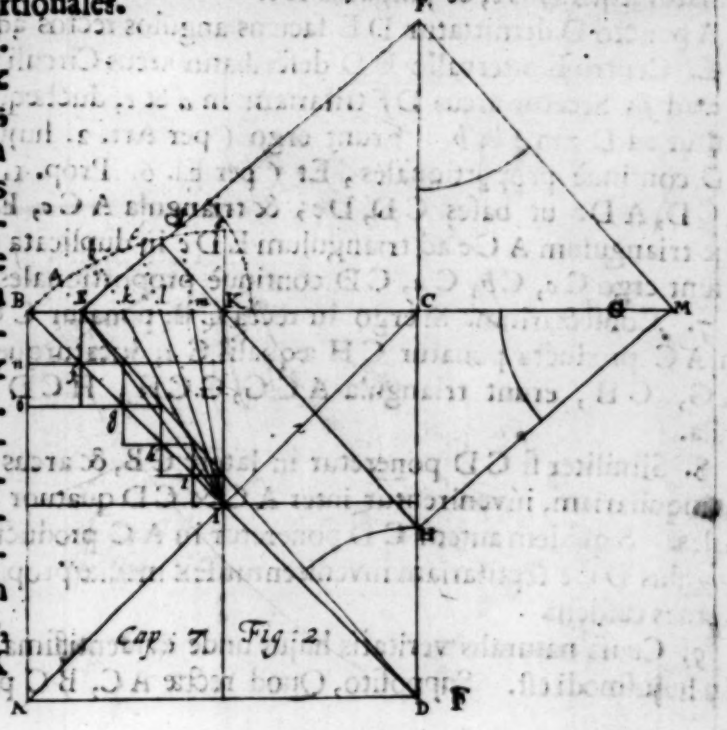
Sumatur inter BC & ſemiſſem ejus CG media proportionalis, eſt autem ea æqualis ſemidiagonali HC. Radio HC deſcribatur arcus C*m* ſecans *qp* productam in *m*. Secetur que arcus C*m* trifariam (id qui fiat demonſtratum eſt in *Lucæ Mathematici* ad Controverſ. 12.) in *k* & *l* ducanturque H*k*, H*b*, ſecantes DC in *n* & *o*. Sumatur autem C*x* æqualis C*n*. Ducatur *x a*, parallela & æqualis C*p* ſecans HC in *e*. Eſt ergo C*e* quadratum. Similiter per punctum *o* ducatur parallela lateri BC ſecans HC in *b*, & per *b* recta *b e* ſecans H*p* in *e*, eruntque tum *e b*, tum *H b* quadrata; nam ſunt rectangula ſuper diagonalem quadrati HC. Sunt ergo quadrata C*e*, *e b*, *b* H continuè proportionalia; & propterea etiam eorum latera (quæ ſunt æqualia rectis C*n*, *n o*, *o p*, ſingula ſingulis) erunt continuè proportionalia. Eſt autem ſimul omnium altitudo *p* C æqualis CG ſive D*p*; ſunt ergo DC, D*n*, D*o*, D*p* continuè proportionales. Quoniam enim eſt ut C*p* ad *np*, ita *np* ad *op*, erit quoque ut C*p* plus C*p* (id eſt tota DC) ad C*p* plus *np* (id eſt D*n*) ita D*n* ad D*o*, & ita D*o* ad D*p*. Sunt ergo D*n*, D*o* duæ mediæ proportionales inter DC & D*p* ſemiſſem ipſius DC. Quod erat inveniendum.

3. Si ergo in recta CB ponatur CE æqualis D*n*, & in DC producta ponatur CF æqualis C*o*, jungaturque FG, ducanturque rectæ DE, EF, erunt triangula DEC, ECF, CFG æquiangula, id eſt arcus *s r*, *t u*, *x y*, (crura habentes æqualia) erunt etiam æquales.

4. Inter datam rectam & ipſius ſemiſſem invenire quatuor Medias Proportionales.

Sit data (in fig. 2.) recta DC & ſemiſſis ejus CG; & fiat quadratum DCBA, cujus pars quarta ſit quadratum IB. Itaque recta IB eſt media proportionalis inter totam BC, & ejus ſemiſſem CG.

Radio IB deſcribatur arcus B*e* ſecans IK productam in *e*; & ſecetur quinquifariam à rectis I*a*, I*b*, I*c*, I*d* ſecantibus BK



in

in E, *k*, *l*, *m*, sumaturque B *n* æqualis B E. Ductæ ergo *nf*, E *f*, altera parallela B E altera parallela B *n* concurrent in diagonali I B in *f*, & erit B *f* quadratum. Eodem modo, si producatur B *n* in *o* ut sit æqualis B *k*, ductæ rectæ per *o* & *k* ad opposita latera parallelæ concurrent in diagonali I B ad *g*; & propterea *f g* erit quadratum; & sic de cæteris. Fient ergo quinque quadrata super I B continuè proportionalia B *f*, *f g*, *g b*, *b i*, *i* I, quorum latera sunt æqualia rectis B E, E *k*, *k l*, *l m*, *m* I. Itaque hæ quoque erunt continuè proportionales. Ergo componendo, ut K B plus K B, id est tota C B est ad C K plus K E, ita erit C K plus K E ad C K plus K *k*, & ita C K plus K *k* ad C K plus K *l*, &c. Sunt ergo C B, C E, C *k*, C *l*, C *m*, C K sex rectæ continuè proportionales; inter quas C E, C *k*, C *l*, C *m*, intercedunt. Inventæ ergo sunt inter datam rectam & ipsius dimidiam quatuor Mediæ Proportionales. Quod erat faciendum.

5. Consectarium. Si in recta D C producta ponatur C F æqualis C *k*; & in B C producta ponatur C M æqualis C *l*; & in C D ponatur C H æqualis C *m*; & denique jungantur H K, H M, M F, F E, E D fient quinque triangula æquiangula D E C, C E F, F M C, M H C, H K C.

6. Inter duas rectas datas qualscunque invenire duas Medias Proportionales.

Sit (fig. 3.) data B C major, C D minor. Disponantur ad angulos rectos in C; & sit B C æqualis A C, jungantur A D, A B; & rectæ B C sumatur æqualis C *c*, & jungatur A *c*.

A puncto D demittatur D E faciens angulos rectos ad D, secansque A *c* in E. Centro E intervallo E D describatur arcus Circuli D *f*, terminatus in A *c* ad *f*; Secetur arcus D *f* trifariam in *d* & *e*, ductæque E *d*, E *e* producantur ad D *c* in *a* & *b*. Erunt ergo (per Art. 2. hujus) rectæ *c b*, *b a*, *a* D continuè proportionales, Et (per El. 6. Prop. 1.) erunt triangula A C D, A D *c* ut bases C D, D *c*; & triangula A C *c*, E D *c* similia; eritque triangulum A C *c* ad triangulum E D *c* in duplicata ratione C *c* ad D *c*. Erunt ergo C *c*, C *b*, C *a*, C D continuè proportionales.

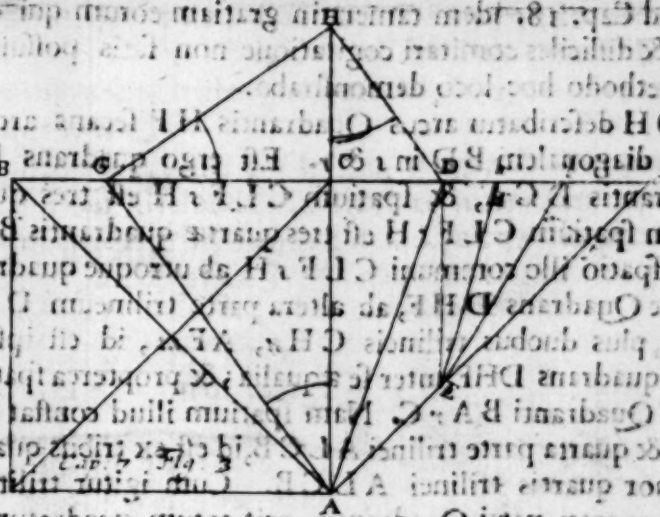
7. Consectarium. Si ergo in recta C B, ponatur C G æqualis C *b*, & in A C producta ponatur C H æqualis C *a*, ducaturque H D, & jungantur A G, G H, erunt triangula A C G, G C H, H C D triangula æquiangula.

8. Similiter si C D poneretur in latere C B, & arcus D *f* sectus fuerit quinquifariam, invenirentur inter A C & C D quatuor mediæ proportionales. Siquidem autem C D poneretur in A C producta, & sectus fuerit angulus D E *c* septifariam inveniretur sex mediæ proportionales inter extremas easdem.

9. Causa naturalis veritatis hujus unde evidentissima oritur demonstratio hujusmodi est. Supposito, Quod rectæ A C, B C productæ essent do-

nec

nec duplicarentur, & rectæ quæ terminos earum jungit ductæ fuerint, erunt hæ totidem diagonales, & facerent tria triangula æqualia & similia. Unde sequetur quod quatuor illa latera essent continuè proportionalia in ratione æqualitatis, quorum A C est primum, C *e* quartam. Itaque ut inter A C & C D (quia minor est C D quam C *e* quantitate D *e*) inveniantur duæ mediæ (cum differentia D *e* oriatur à tribus mulctis sive diminutionibus lateris B C, nempe *c b*, *b a*, *a* D) necessarium est ut differentia D *e* dividatur in tres partes *e b*, *b a*, *a* D continuè proportionales. Et quia angulus C A B est semirectus, etiam angulus D E *e* (à cujus puncto E divisio rectæ D *e* in tres partes continuè proportionales instituitur) debet etiam esse semirectus. Quoniam autem divisio illa in tres fit per trisectionem anguli semirecti, nec aliter; & in sumendis quatuor mediis, per quinquisectionem, nec aliter; item in sumendis sex mediis proportionalibus per septisectionem, nec aliter, & sic ulterius; nulla alia methodus inserviet ad inveniendas Medias quæ sunt numero pares, ut 2, 4, 6, 8, &c. præter anguli semirecti trisectionem, quinquisectionem, septisectionem, &c.



Cap. VIII.

De Ratione Quadrati ad Quadrantem Circuli sibi inscripti.

I. SIt Quadratum A B C D divisum tum à rectis E F, G H tum à diagonalibus A C, B D concurrentibus in centro quadrati ad I quadrifariam, secantibusque arcus A C, B D in L & M; & describantur centris C & D arcus quadrantales A C, B D mutuo se secantes in recta E F ad K.

Dico Quadratum A B C D esse ad Quadrantem D A C ut 5 ad 4.

Etsi demonstratum hoc ante sit, in *Loci Mathematici* ad Prop. 18. & in *Roseto* ad Cap. 18. idem tamen, in gratiam eorum qui demonstrationes longas & difficiles comitari cogitatione non satis possunt, breviore & faciliore methodo hoc loco demonstrabo.

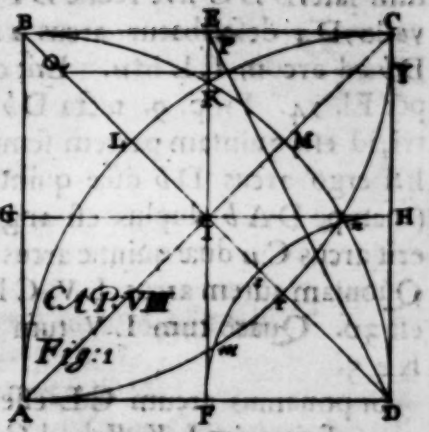
Radio D H describatur arcus Quadrantis H F secans arcum B A C in *m* & *n*, & diagonalem B D in *s* & *r*. Est ergo quadrans D H F quarta pars quadrantis D C A, & spatium C L F *s* H est tres quartæ ejusdem. Idem autem spatium C L F *s* H est tres quartæ quadrantis B A *r* C. Dempto igitur spatio illo communi C L F *s* H ab utroque quadrante, restabunt ab una parte Quadrans D H F, ab altera parte trilineum D A *r* C, minus bilineo *m n*, plus duobus trilineis C H *n*, A F *m*, id est ipsum trilineum D A *r* C & quadrans D H F inter se æqualia; & propterea spatium B A F *s* H C æquale erit Quadranti B A *r* C. Nam spatium illud constat ex triplo quadrato D I & quarta parte trilinei A L C B, id est ex tribus quartis Quadrantis & quatuor quartis trilinei A L C B. Cum igitur trilineum A L C B æquale sit quartæ parti Quadrantis, erit totum quadratum A B C D ad totum quadrantem D A C ut 5 ad 4. Quod erat demonstrandum.

II. Constat hinc bilineum A I C L A esse ad trilineum A L C B ut 3 ad 2. Cum enim totum quadratum sit 5 erit triangulum A B C $2\frac{2}{3}$ quorum trilineum A L C B est unum; quare bilineum A I C L A est $1\frac{1}{3}$. Est ergo ratio bilinei dicti ab trilineum dictum ut 3 ad 2.

III. Constat etiam bilineum *m n* æquale esse duobus trilineis C H *n*, A F *m*.

IV. Constat

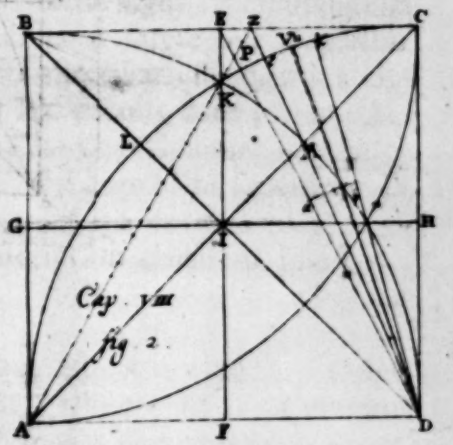
IV. Constat item, si ducta sit recta lateri BC parallela per punctum P in quo recta DE secat arcum CL, & terminatur in latere DC ad Y & in diagonali BD ad Q fore ut quadratum à DQ æquale sit quadranti DAC; cum quadratum ABCD ad quadratum ab YQ sit ut 5 ad 4; & trilinea CYP, PQL æqualia.



V. Constat etiam dimidium quadrati ABCD, nempe rectangulum AE, dempta figura AKF esse quintam partem quadrati ABCD. Nam id quod continetur intra tres lineas AL K, KB, & BA una cum trilineo BEK æquale esse trilineo ALCB, id est quintæ parti quadrati ABCD; quia BEK, CEK sunt æqualia. Idem quoque verum est de rectangulo DE. Unde sequitur duas figuras FKD, FKA simul sumpta æqualia esse tribus quintis quadrati ABCD, id est tribus quartis quadrantis DAC.

Atque hæc quidem scire, cum per se non magnæ sunt utilitatis, præterire potuissem, nisi cum Cyclometriam tractare incepissem cuperem etiam perficere. Etiam quoniam ad plenitudinem Cyclometriæ pertinet Circuli quoque partium, id est Sectorum sive Angulorum cognoscere quantitates; de illis jam dicendum est.

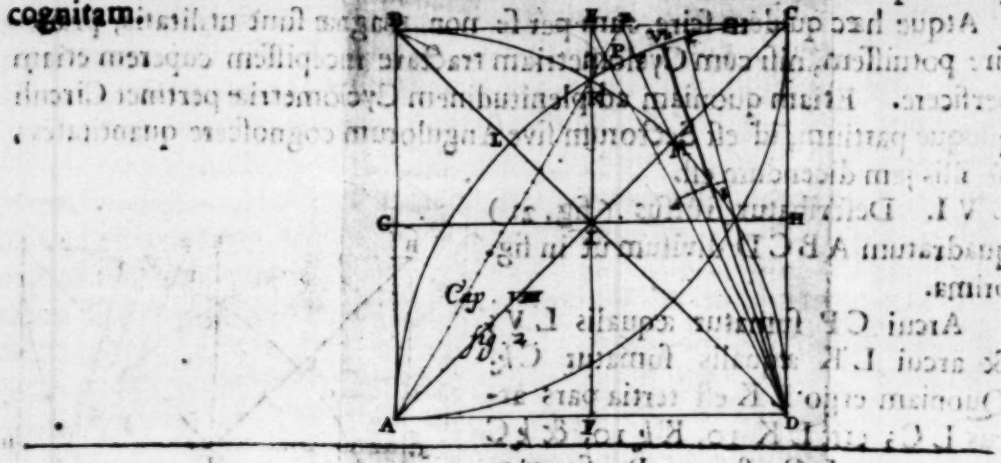
VI. Describatur rursus (fig. 2.) quadratum ABCD divisum ut in fig. prima.



Arcui CP sumatur æqualis LV; & arcui LK æqualis sumatur Ck. Quoniam ergo LK est tertia pars arcus LC; erit LK 10, Kk 10, & kC 10, quorum LC est 30. Rursus quoniam CP, LV sunt facti æquales, diviso arcu CL à recta De bifariam divisus erit & arcus PV bifariam in e. Est ergo tum arcus Ce tum arcus Le 15. Quare tum arcus Ve tum arcus Pe est $2\frac{1}{2}$, & arcus PV 5, & arcus KV $7\frac{1}{2}$, ergo arcus LV ut & arcus PC $17\frac{1}{2}$. Ergo arcus CV sive KP est $12\frac{1}{2}$. A recta ED auferatur Es æqualis se-

milateri E C, & reſiduum D *a* (per El. 13. Prop. 1.) erit majus ſegmentum lateris D C ſive rectæ D P diviſæ extrema & media ratione. Intervallo D *a* deſcribatur arcus *a b* ſecans arcum D B in *b*, & producatur D *b* ad arcum C L in *u*. Erit ergo arcus C *u* 12 quorum C L eſt 30. Nam per El. 14. Prop. 9. recta D *b* ſubtendit decimam partem totius perimetri, id eſt, quintam partem ſemiperimetri, id eſt, duas quintas arcus B D. Eſt ergo arcus D *b* duæ quintæ arcus B D. Et quia angulus in centro (nempe D A *b* duplus eſt anguli in circumferentia, nempe anguli C D *u*, erit arcus C *u* duæ quintæ arcus C L. Ergo cum C L ſit 30 erit C *u* 12. Quoniam autem arcus L V, C P ſunt æquales, erit C V 12½ quorum L C eſt 30. Quare tum L V tum C P erit 17½, & P *e* vel *e* V 2½, & P V vel K *e* 5.

Si ponamus arcum C L eſſe 45, eadem tamen invenietur ratio angulorum. Erit enim L K, K *k*, *k* C, ſinguli 15, & L *e*, *e* C uterque 22½, & K *e* 7½, L P 18¾, quare C P erit 26¼, & L V tantundem, & C V 18¾. Jam 18¾ plus 26¼ faciunt 45. Atqui eadem eſt ratio 10 ad 5 quæ 15 ad 7½. Manet igitur firmum, Quod angulus E D C ad angulum L D C ſemirectum eſt ut 17½ ad 30, & ad L P ut 17½ ad 12½ ſive ut 7 ad 5, & ad L K (quæ eſt 10) ut 7 ad 4. Habemus ergo anguli E D C quantitatem non antè cognitam.



CAP.

CAP. IX.

De Solidis & eorum Superficiebus.

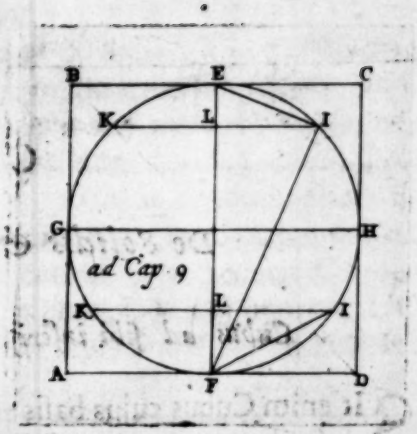
Cubus ad sibi inscriptum Cylindrum est ut 5 ad 4.

I. SIt enim Cubus cujus basis est quadratum A B C D. Quadrato huic inscribatur circulus G E H F. Est ergo (per Cap. præcedens) quadratum A B C D ad Circulum G E H F ut 5 ad 4. Super omnia puncta ambitus tum quadrati A B C D tum circuli G E H F intelligantur erectæ perpendiculares; quarum unius cujusque altitudo sit æqualis altitudini E F. Sic enim erit descriptus Cubus una cum Cylindro sibi inscripto; & basis Cubi ad basem Cylindri erit ut 5 ad 4. Planum autem quod secat Cylindrum & Cubum basi parallelum faciet ubique Sectionem quadrati ad Sectionem circuli inscripti ut 5 ad 4. Ergo ut quadratum A B C D ad circulum G E H F (id est ut 5 ad 4.) ita (per El. 6. Prop. 1.) erunt omnes simul Sectiones Cubi (id est Cubus) ad omnes simul Sectiones Cylindri (id est ad Cylindrum) ut 5 ad 4.

II. Superficies Cubi ad superficiem sibi inscripti Cylindri est ut 5 ad 4. Est enim superficies Cubi æqualis sex quadratis a latere sive altitudine Cubi. Cylindri autem superficiem sine basibus aqualem esse quatuor circulis in Sphæra maximis, & cum basibus sex circulis demonstravit Archimedes Lib. 1. de Sphæra & Cylindro. Tota ergo Cylindri superficies æqualis est sex circulis in Sphæra maximis. Est ergo Cubi superficies ad Cylindri superficiem totam, ut sex quadrata ad sex circulos maximos, id est ut unum quadratum ad unum sibi inscriptum circulum, id est ut 5 ad 4.

III. Cubus ad Sphæram sibi inscriptam est ut 15 ad 8. Cubus enim ad Cylindrum (ut jam ostensum est) est ut 5 ad 4. Cylindrus autem ad Sphæram (ut demonstravit Archimedes libro primo de Sphæra & Cylindro) est ut 3 ad 2. Componitur ergo ratio Cubi ad Sphæram ex rationibus 5 ad 4 & 3 ad 2. Fiat ergo ut 3 ad 2 ita 4 ad aliam;

illa vero erit $2\frac{1}{7}$. Ratio ergo 5 ad $2\frac{1}{7}$ componitur ex rationibus Cubi ad Cylindrum & Cylindri ad Sphæram. Est ergo Cubus ad Sphæram ut 5 ad $2\frac{1}{7}$, id est (multiplicato utroque per 3.) ut 15 ad 8.



IV. Sphæra æqualis est dimidio Cylindro cui est inscriptus una cum dimidio Cono qui eidem Cylindro est inscriptus. Cum enim demonstratum sit ab Archimede Cylindrum ad sibi inscriptam Sphæram esse ut 3 ad 2, & ad inscriptum Conum ut 3 ad 1, erunt Cylindrus, Sphæra, & Conus ut 3. 2. & 1. Sed 2 (id est Sphæra) æqualis est dimidio aggregato ex 3 & 1 (id est dimidio Cylindro & dimidio Cono simul sumptis) ut est propositum.

V. Ut inveniatur Cylindro Sphæra æqualis, docet etiam Archimedes Libro secundo de Sphæra & Cylindro, Prop. 1. Nempe ut sumatur Cylindrus qui sit ad Cylindrum propositum ut 3 ad 2, id est ut propositus Cylindrus ad Sphæram; deinde inter altitudinem Cylindri assumpti & diametrum Sphæræ propositæ ut inveniantur duæ mediæ proportionales. Sed invenire inter duas rectas datas, duas medias proportionales, nondum erat cognitum. Id quo pacto fiat demonstravi ego in capite hujus septimo.

VI. Superficies Sphæræ æqualis est quatuor circulis in eadem Sphæra maximis.

Nam si arcus semicirculi E F circumvolvatur super axem E F, fiet Sphæræ Superficies. A puncto F ad circumferentiam ducatur utcunque recta F I, & à puncto I ducatur recta I K parallela lateri B C, secans circumferentiam in K & axem in L, erunt anguli ad L recti; & ut F L ad L I, ita erit L I ad L E; & ut F I ad F L, ita erit E I ad E L propter similia triangula F L I, E L I. Dum autem semicirculus volvitur super axem E F describetur à puncto I circulus I K in Sphæræ superficie. Atque ita continget in quocunque puncto circumferentiæ F E statuatur punctum I. Sed ut F E ad L E ita est circulus super F E ad circulum super L E. Sunt enim circuli in duplicata ratione radiorum.

Quoniam

Quoniam ergo omnes perimetri I K faciunt ſuperficiem Sphæræ, & omnes rectæ I K faciunt circulum G E H F; erit ſuperficies Sphæræ ad circulum G E H F in duplicata ratione axis E F ad radium circuli G E H F ſemiſſem ipſius E F. Sed circulus deſcriptus axe E F ad circulum G E H F eſt etiam in duplicata ratione axis E F ad ſemidiametrum circuli G E H F. Eſt ergo ſuperficies Sphæræ æqualis circulo cujus ſemidiameter eſt axis E F. Circulus autem cujus radius eſt axis Sphæræ quadruplus eſt circuli G E H F. Quare & ſuperficies Sphæræ eſt quadrupla ejuſdem.

VII. Sequitur hinc ſuperficiem cujuſcunque ſegmenti ſive portionis Sphæræ, ad ſuperficiem portionis reliquæ eſſe, ut portio axis abſciſſa ab I K ad portionem reliquam; nempe ſuperficiem portionis F I K eſſe ad ſuperficiem portionis E I K ut portio axis F L ad portionem reliquam E L.

VIII. Denique quia demonſtravit Archimedes ſuperficiem Cylindri convexam quadruplam eſſe circuli qui Cylindri eſt baſis; ſequitur idem eſſe quoad quantitatem ſuperficiei Cylindricæ ſive generetur a revolutione perimetri baſis circa axem, ſive per motum baſis per Cylindri latera, ſive per lateris motum circularem. Nam omnia hæc æquales gignunt ſuperficiei quantitates. Neque etiam ſine demonſtratione difficile eſt intelligere, diſcrimen nullum eſſe in facienda ſuperficie, utrum circulus qui eſt Cylindri baſis feratur rectà per latus, vel in omni puncto lateris deſcribantur ſingulæ perimetri, an a toto latere deſcribatur perimeter unica. Superficies enim Cylindri (id eſt Cylindri excoriati pellicula evoluta & in plano explicata) fit rectangulum cujus unum latus eſt, baſis diameter, alterum linea recta cujus quadratum æquale eſt decem quadratis a baſis ſuæ diametro.

CAP. X.

Iterum de Solidis & eorum Superficiebus methodo alia per causas efficientes.

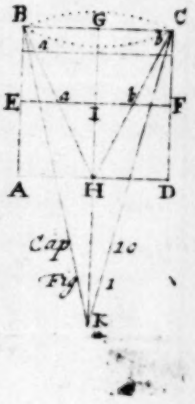
Lemma.

AGens operando uniformiter dato tempore, opus designatum perficiens, si temporis illius partibus aliquibus quidem operetur, aliquibus autem cesset; opus quod fit ad opus quod relinquitur infectum, erit ut tempus in quo operatur ad tempus in quo cessat. Exempli causa. Si ager datus continuata operatione aretur totus triduo; deinde si biduo tantum aretur, die uno cessetur; id quod erit aratum ad id quod relinquitur inaratum erit ut 2 ad 1; & quod arandum designabatur erit ad aratum ut 3 ad 2, & ad inaratum ut 3 ad 1. Similiter, quantum continua & uniformi opera agens efficit tempore quocunque, tantundem efficit opera simili agens duplum, si dimidio ejusdem temporis operetur, dimidio cesset.

Praeterea quantum Agentis inter operandum perit, tantundem censendum est cessari. Atque haec lumine naturali manifesta sunt.

1. Cylindri recti convexa superficies aequalis est Coni recti superficiei habentis eandem cum Cylindro basem, altitudinem verò duplam.

Sit enim Cylindrus (fig. 1.) A B C D qualis proponitur, cujus basis est B C circulus. Est autem A B C D quadratum. Dividatur quadratum A B C D bifariam a recta G H parallela lateri A B, & producatur G H in K ita, ut G K dupla sit G H. Jungantur B K, K C, & B H, C H. Habent ergo quadratum A B C D & triangulum B K C eandem basem, sed dupla est altitudo trianguli B K C altitudinis quadrati A B C D. Intelligatur rectangulum D G circumvolui circa axem G H, describeturque ab ea circumvolutione a rectangulo quidem D G Cylindrus rectus, a triangulis autem C H G, C K G duo Coni recti; a latere autem D C Cylindri superficies, & a Conorum lateribus C H, C K duae superficies Conicae, & a puncto C, circumferentia basis. His intellectis demonstrandum est superficiem Conicam Coni B K C aequalem esse superficiei integrae Cylindri A B C D.

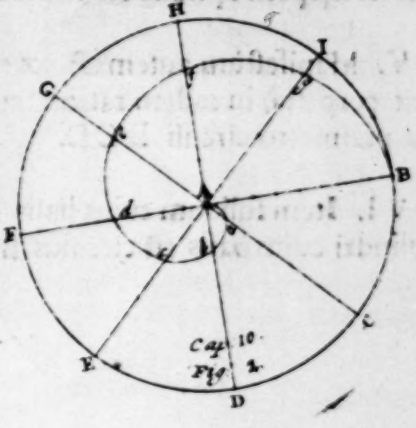


Ducatur

Ducatur recta *a b* utcunque, ſed lateri BC parallela ſecans rectas BH, CH, in *a* & *b*. Erit ergo ratio BC ad *a b* eadem cum ratione H*a* ad HB. Et quoniam poſita eſt *a b* ubicunque, eadem erit ratio ubique. Quia recta BC motu uniformi & ad angulos rectos per latera BA, CD perficiet tum Cylindrum ABCD tum ſuperficiem ejus integram, ſed motu deficiente ſecundum rationes temporum deſcribent triangulum BHC; tantum ab opere ceſſat recta BC quantum operatur. Erit ergo ſuperficies BHC æqualis duabus ſuperficiebus BAH, CDH infectis; (Per Lemma præcedens.) Quoniam autem diametri ſunt inter ſe in eadem ratione cum perimetris, etiam perimetri deficient in eadem ratione cum temporibus. Perimetri ergo circulorum quæ conſtituunt ſuperficiem BHK, id eſt ipſius Coni BHC ſuperficies, eſt æqualis dimidiæ ſuperficiei totius Cylindri. Sed triangulum BKC eſt duplum trianguli BHC, atque ſuperficies Conica Coni BKC dupla eſt ſuperficiei Conicæ Coni BHC. Eſt ergo ſuperficies Coni BKC æqualis ſuperficiei convexæ Cylindri ABCD. Quod eſt propoſitum.

II. Superficies Cylindri convexa quadrupla eſt baſeos ejuſdem Cylindri. Cum enim ſuperficies Cylindri convexa facta ſit a perimetro circuli qui eſt Cylindri baſis operante uniformiter; ſi perimeter quæ ſit dupla perimetri baſis, ejuſdem temporis dimidio quidem operetur, dimidio autem ceſſet, efficiet tantundem, per Lemma præcedens. Sed perimeter circuli cujus radius eſt HG dupla eſt perimeter baſeos BC; & circulus ab HG fit a radio HG æquali BC motu circulari, id eſt tantundem quantum operatur ceſſante, nimirum, pereunte radio BC inter operandum pro ratione temporum in quo operatur. Eſt ergo circulus cujus radius eſt HG (qui quadruplus eſt circuli qui eſt Cylindri baſis) æqualis ſuperficiei convexæ Cylindri ABCD. Atque hæc brevis, clara, & naturalis eſt deducta a cauſa efficiente demonſtratio; ſed qua uti Archimedes non potuit, obtinente tunc temporis ſententia, Conſiderari debere lineam ſemper ſine omni latitudine, id eſt, ut Nihil; & propterea ſuperficiem a motu lineæ nullo modo deſcribi poſſe; unde demonſtratione ducente ad impoſſibile, longiſſima, & a ſolius Archimedis ingenio ſuperabili, propter aliorum præjudicia uti coactus eſt.

III. Cylindrus rectus Coni recti ſibi inſcripti eſt triplus. Cylindrus enim fit a motu uniformi circuli BC (circuli, dico, non perimetri) qui eſt baſis communis tum Cylindri ABCD, tum Coni BHC. Habent autem circuli rationem duplicatam ejus quam habent eorum diametri. Circulus ergo BC



ad circulum *a b* est in duplicata ratione diametri B C ad diametrum *a b*, & sic ubique. Circulus autem B C dum facit Conum B H C perdit interop. randum de sua magnitudine ubique juxta duplicatam rationem diametri B C ad diametrum *a b*. Sed (ut ostensum est cap. 2. Art. 9.) quando mediæ proportionales tum Geometricè tum Arithmeticè sumuntur ubique, omnes simul sunt eædem. Perdit ergo de sua magnitudine circulus B C dum facit Conum B H C duas tertias magnitudinis suæ integræ. Quantum autem magnitudinis suæ perdit, tantum ab opere cessat. Faciet ergo tertiam partem ejus quod feciſſet idem circulus B C integer, id est tertiam partem totius Cylindri. Est ergo Conus tertia pars Cylindri, id est, Cylindrus Coni sibi inscripti est triplus.

IV. Eadem methodo ostendi potest spatium spirale quod a prima circuli revolutione nascitur, esse tertiam partem ipsius circuli.

Centro A, radio A B describatur circulus, seceturque a rectis A C, A D, A E &c. octisariam. Secetur item semidiameter octisariam, cujus una octava A *a* notetur in recta A C; Deinde duæ octavæ in radio A D ad *b*; tres in radio A E ad *c*; quatuor in radio A F ad *d*; quinque in radio A G ad *e*; sex in radio A H ad *f*; septem in radio A H ad *g*. Intelligatur autem unamquamque octavam divisam esse sicut totus radius in partes tot æquales, in quot dividi posse intelligibile est; ita ut quarum partium A B est 8, A *a* sit 1. A *b* 2. A *c* 3. A *d* 4. A *e* 5. A *f* 6. A *g* 7. Deinde intelligatur ductam esse lineam spiralem (cujus initium est A & finis B) per omnia puncta, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, B. Atque hæc erit linea spiralis descripta ab Archimede. Ostendendum ergo est, spatium concluſum ab hac linea Spirali, & a semidiametro A B esse tertiam partem circuli B C D —

Quoniam circulus B C D — factus est a radii A B integri circumductione, & spatium Spirale ab eodem radio, sed deficiente, id est cessante ubique secundum rationem temporum duplicatam (sunt enim circuli omnes per *a*, *b*, *c*, *d*, &c. in duplicata ratione rectarum A *a*, A *b*, A *c*, &c.) spatium quod extra lineam Spiralem relinquitur insectum, duplum erit ejus quod efficitur a conversione Spirali; & propterea ambo simul spatia, factum & insectum spatii Spiralis est triplum.

V. Manifestum autem est, ex eo quod linea Spiralis A *a b c d e f g* B deficit perpetuò in eadem ratione cum temporibus, æqualem eam esse dimidiæ perimetro circuli B C D.

VI. Item solidum cujus basis est spatium Spirale, tertiam esse partem Cylindri cujus basis est circulus B C D —

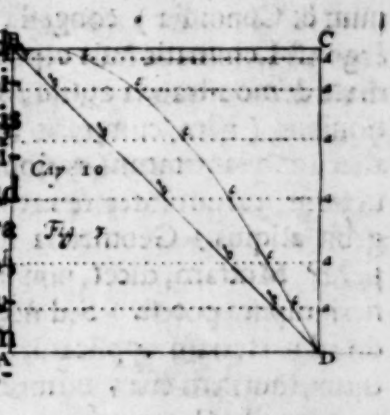
VII. Item

VII. Item quadratum circulo BCD —— circumſcriptum, eſſe ad ſpatium Spirale ut 15 ad 4. Quadratum enim ad circulum ſibi inſcriptum eſt (ut ſupra demonſtravimus) item Cubum a radio ad Cylindrum eſſe ut 5 ad 4. Componitur ergo ratio quadrati ad ſpatium Spirale ex rationibus 5 ad 4 & 3 ad 1. Itaque ſi fiat ut 3 ad 1 ita 4 ad aliam, quæ erit $\frac{4}{3}$, erit ratio quadrati ad ſpatium Spirale compoſitum ex rationibus 5 ad 4 & 4 ad $\frac{4}{3}$. Quadratum ergo ad ſpatium Spirale eſt ut 5 ad $\frac{4}{3}$, id eſt (utroque multiplicato per 3) ut 15 ad 4.

VIII. Ex iiſdem etiam ſequitur, ſi circulus BCD — ſit baſis Cylindri cujus baſis ſit æqualis circuli ejuſdem diametri, & ſolidum fiat cujus baſis quidem ſit ſpatium Spirale, altitudo autem æqualis Cylindri altitudini; Sphæram in qua maximus circulus eſt BCD —, fore ſolidi prædicti duplum. Quadratum enim cui circulus BCD inſcribitur, ſicut etiam Cubus a diametro ad Cylindrum cujus baſis eſt circulus BCD — ſupra oſtenſum eſt eſſe ut 5 ad 4, & ad Sphæram ut 15 ad 8; & ad ſpatium Spirale ut 15 ad 4. Detracta autem ratione 15 ad 4 a ratione 15 ad 8, relinquitur $\frac{60}{120}$ id eſt $\frac{1}{2}$. Solidum ergo cujus baſis eſt Spirale ſpatium eſt Sphæra in qua maximus circulus eſt BCD —, dimidium.

IX. Eadem methodo invenietur rectangulum quodlibet eſſe ad parabolam ſibi inſcriptam ut 3 ad 2.

Deſcribatur enim rectangulum (fig. 1.) quodcunque ABCD, in cujus latere DC ſumatur ubicunque D*a*, cui in latere AB ſumatur æqualis A*d* ſecans diagonalem BD in *b*; & ſic fiat ubique. Deinde ut *da* ubique ad *dc* ſic fiat *de* ad *db*; & per omnia puncta *e* ducatur linea curva B*ee*D. Lineam hanc curvam eſſe parabolicam, & figuram AB*ee*D, eſſe dimidiam parabolæ, Mathematici conſentiunt omnes. Oſtendendum ergo eſt, Rectangulum ABCD eſſe ad ſemiparabolam AB*ee*D ut 3 ad 2.

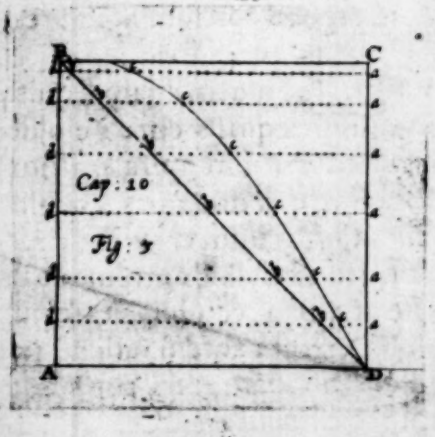


Deſcribitur enim rectangulum ABCD a recta AB mota uniformiter & parallelos ad latus oppoſitum DC. Sed ſemiparabola AB*ee*D deſcribitur a recta CB mota ad latus oppoſitum AB continuè pereunte in duplicata ratione temporis AB ad tempus D*a*; nam ratio *da* ad *de* eſt ubique duplicata rationis *da* ad *db*; & propterea (per cap. 2. art. 9.) omnes *da* ſimul ſunt ad omnes *de* ſimul, in duplicata ratione Arithmetica, omnium *da* ad omnes *db*. Itaque id quod fit uniformiter a tota AB (id eſt totum rectangulum ABCD) ad id quod fit a motu lateris DC verſus AB pereunte (id eſt ceſſante ab opere) juxta rationem Arithmeticam temporis ſubduplicatam, erit id quod relinquitur infectum, nempe CD*ee*B una pars totius rectanguli

ABCD, quarum id quod perficitur, nempe ſemiparabola ABeeD eſt duæ.

Itaque rectangulum ABCD eſt earundem partium 3. Eſt ergo rectangulum ABCD ad ſemiparabolam ſibi inſcriptam ut 3 ad 2, & duplum rectangulum ad totam parabolam ſibi inſcriptam ut 3 ad 2.

X. Etiam ut ratio inveniatur rectanguli ad parabolaſtrum (quæ parabola vocatur cubicalis) eadem methodo uti poſſumus. Nam ſi fiat ubique ut *da* ad *de*, & *dc* ad *db* ita *db* ad quartam *de* (ut ſint quatuor continuè proportionales *da*, *dc*, *db*, *de*) linea parabolaſtri, illius curva tranſibit per omnia puncta *e*; & ratio rectanguli A B C D erit ad paraboláſtri illius dimidium ut 4 ad 3. Et ſic procedi poteſt ad parabolaſtrum ſecundum, tertium, &c. quorum rationes ad rectangulum cui inſcribuntur, in tabulam (atque etiam Cylindrorum ad inſcriptum ſibi Conum & Conoidia) congeſta ſunt capitis 17 libri mei *de Corpore*. Tanta ergo eſt Lemmatis huic capiti præfixi ad maxima Geometriæ puræ Problemata demonſtranda aptitudo naturalis, ut qui noverit quibus rationum rationibus (nam, cum ratio ſit quantitas, erunt rationum, non minus quam aliarum quantitatum, rationes) unaquæque figurarum comparatarum generatur, earum inter ſe rationes ignorare non poſſit. Sed qualis eſt (rogabit aliquis) Geometria illa pura? An Geometria vera eſt quæ eſt impura? Mixtam, dicet, non impuram. Quomodo autem pura puræ mixta fieri impura poteſt. Sed neque hoc dicet; mixtam tamen tunc eſſe, quando ad materiam applicatur. Manifeſtum autem eſt, ſi materiæ non applicetur, inutilem eſſe; nimirum meras eſſe eaſque difficiles nugas? Puram ego appello Geometriam, cui nihil admiſcetur Arithmeticæ, niſi quod conveniat etiam Quantitati continuæ, quæ Geometriæ eſt ſubjectum proprium & adæquatum. Itaque quæ corrumpunt Geometriam, ſunt præcipuè *ſurditas numerorum*, & *longitudo ſine latitudine*; & *latitudo ſine craſſitie*; & nuper introducta doctrina, Fractionem eſſe Rationem; quaſi dimidium eſſet ratio dimidii ad totum.



CAP.

Cap. XI.

De Demonſtratione.

De Demonſtratione dubitari primò poteſt, utrum Scientiam ſequatur, an antecedat. Antecedere plerique dicunt. Nam Demonſtratio aut ſcientifica aut vana eſt. Eſt ergo ſcientia cauſa efficiens, & propterea effectum antecedit. Concedendum ergo eſt, Donſtrationem magiſtri, Scientiam diſcipuli antecedere; ſed nihil amplius. Verum ſi qua concluſio a quovis homine fuerit demonſtrata, primò neceſſe eſt ut veritatem ejus cognoverit antequam aut ſibi aut aliis eam potuiſſet demonſtrare. Nemo enim demonſtrare id poteſt quod verum an falſum ſit ignorat. Manifeſtum ergo eſt demonſtratione ſcientiam natura ſua priorem eſſe.

Secundo quæri poteſt (cum Geometria humano generi magnæ ſit utilitatis, & ornamenti maximi) quibus præcipuè hominibus bonum tantum debeamus, Demonſtratoribus an non Demonſtratoribus. Certum eſt, longo tempore ante Euclidem, maxima atque artificiociſſima conſtructa fuiſſe ædificia, Turrem Babelis, Pyramides Ægyptias, Muros hortoſque in Babilone mirabiliſſimos, Regiam Perſidis, aliaque; item oſtenſum Horologium ſolare Lacedemone primum. Opera hæc ſcientiam ſine dubio requirebant; illorum tamen authores nihil demonſtraverunt; ſed logica naturali veritatem futurorum operum prævidebant, quanquam alii poſtea curiosè id fecerunt eo animo, ut multorum animos ad rerum utilium inventionem excitarent. Proportiones quoque quinque Corporum regularium (ut in Epigrammate Græco veteri legitur) invenit quidem Pythagoras, demonſtravit autem Plato, & poſt illum (El. 3.) Euclides. Platonis demonſtratio nullo extat. Itaque commoda illa inventa pluribus Inventoribus, quorum nomina (paucis exceptis) nunc periere, debemus; non demonſtratoribus. Quid ergo? Inutiliſne eſt demonſtratio? Minimè quidem illis qui docentur; doceri autem non magnæ laudis eſſe arbitror, quanquam ipſum docere, modo rectè & ſine mercede, honorificum ſit. Sed demonſtratio ſcientiæ alicujus amplæ, & antea ignoratæ nonne magnam meretur gratiam? Ita, ſed qui id fecerit, utilium Inventoribus adnumerandus eſt. Atque ob hanc cauſam debetur Euclidi gratia, qui methodum demonſtrandi, id eſt bene ratiocinandi, mundo exhibuit omnium primus. Maximas quidem deberi gratias conſentiunt omnes, illis qui homi-

nibus authores primi erant, ut se consociarent, unique Potestati summæ obedire inter se paciscerentur. Proximas habebo illis qui eosdem homines, pacta sua ne violare velint persuadebunt.

Tertiò loco de Demonstratione interrogare aliquis potest, Quid sit. Demonstrationem plerique nec immeritò vocare solent, Veritatis in qualicunque quæstione dubia probationem evidentem. Satis enim demonstratum sibi unusquisque putat cujus animus iis quæ ad probationem allegantur plenè acquiescit. Sed Philosophi veteres perpetuis disputationibus innutriti, quoties de comparatione motuum & magnitudinum contendebatur, figuris plerumque descriptis atque ante oculos discipulorum suorum positis, ab illis quasi ostensis (id est aliquid amplius ut putabant quam probatis) argumenta sua appellabant ἀποδείξεις, id Latinè est Demonstrationes. Nunc autem unusquisque quoties paulò vehementius aliquid asserit, demonstrasse se affirmat.

Demonstratio autem est quando conclusionis veritas fundamenta prima habet in illis rebus quæ sunt jam antè illis cognitæ quos alloquitur is qui probat. Hæc autem fundamenta, sunt Definitiones, & præterea Axiomata quæ demonstrata quidem non sunt, vera autem, & bene intellecta esse debent. Nam a veris nihil inferri potest præter verum; neque quicquam sciri quantumvis verum quod non sit intellectum.

Quartò, quæri potest quis Definitionum, & quis Axiomatum sit usus. Definitionum usus manifestus hic est, ut is cui demonstratur, demonstrantem intelligat quam vocis definitæ significationem certam & eandem ubique esse velit. Significatio enim quæ mutatur fallit. Facit ergo definitio ad Intellectum, quia sine Intellectu neque demonstratio ulla est, neque in eo qui discit ulla fit scientia, sed necessario inde introductæ sunt distinctiones intempestivæ & obscuræ, adeo ut eorum quæ dicuntur nihil existat in Imaginatione. Sunt quidem veritates quæ sciri ab homine omnino non possunt, demonstratum autem quod ab homine intelligi non potest nihil est.

Axiomatum usus est in eo quod Demonstrationum seriem nimis longam, breviorem reddat; nimirum demonstrationes non necessarias tollendo. Nam veritas axiomatum citiùs & clarius apparere debent quam media ipsa quibus sunt demonstranda.

In omni demonstratione, causa conclusionis in præcedentibus inesse debet quorum virtute infertur, id est in ante demonstratis vel lumine naturali cognitis. Ergo ubi verba cohærent, erit demonstratio. Etsi enim rei subjectæ causa ignoretur, conclusio tamen veritatem principiorum unde derivatur retinebit. Hujusmodi autem demonstrationes faciles sunt, quanquam scientiam parum promoveant.

Potissima

Potiſſima omnium demonſtrationem ea eſt, quæ deducitur a rei ſubjectæ generatione juxta naturæ ordinem. Itaque & definitiones ad ſcientiam utiliſſimæ ſunt illæ in quibus explicata eſt rei ſubjectæ generatio, id eſt, quo motu, quo motuum concurſu, quibus motuum & temporum rationibus ſpatia quæque & magnitudines determinantur.

Proxima huic demonſtrationi illa eſt quæ deducitur (a negatione veritatis) aliquid impoſſibile. Hujuſmodi autem demonſtratio vim ſuam ab eo habet, Quod a vero inferri nihil poteſt præter verum.

CAP. XII.

De Fallaciis.

HOminem Verborum, id eſt, Sermonis ſui intelligentem, eundemque a principiis veris Definitionibus (dico) naturalibus, probationem ſuam ordientem, lenteque progredientem in materia Mathematica, ut diu aut ſæpe decipiatur, atque ita ut monitus in errore ſuo perſeveret, impoſſibile ferè eſt. Nullus in intellectu (propriè loquendo) error eſſe poteſt. Nam intellectu errare idem eſt quod non intelligere. Lingua, pedibus, manibuſque rectè uti, non a Magiſtro demonſtratur, ſed exercendo diſcimus. Et quanquam verba noſtra ferè omnia pro varietate rerum de quibus ſcribimus aut loquimur, ſignificationem mutent, illis tamen domi, in agro, in foro utimur ſine damno; quia ad ſocietatem civilem, unuſquiſque ſi alterum rectè intelligat ſatis habet.

Aliter fit in Philoſophia, ubi nihil quæritur præter veritatem; præcipuè verò ſi inventionem ſequatur gloria. Aliud eſt ambulare, aliud in ſublimi ſuper extenſum funem ambulare. Alterum enim facile eſt, & ſine damno etiamſi titubetur; itaque negligentiæ, veniæ locus eſt. Funambulo non item. Veritas ſuper filum ambulat tenuiſſimum, ſine illa fori latitudine Metaphorica; præſertim Mathematica, quæ niſi Definitionum & Axiomatum ponderibus quacunque moveatur librata ſit, cum ſpectantium riſu præcipitatur.

Fallaciarum ergo in Mathematicis principalis cauſa & frequentiſſima eſt, Quod ratiocinationis initium ſumant a definitionibus non intellectis, aut falſis, aut ambiguis, ex quibus certi deduci nihil poteſt. Hoc idem ſenſerunt etiam Philoſophi Græci cum ſcientiæ huic impoſuerunt nomen Mathematicæ, ab intellectu. Nam vulgò cum quis alium allocutus dubitaret an intelligeretur necne, interrogabat hoc modo μανθάνεις; Cui reſpondebatur μανθάνω, vel ἐ μανθάνω, ita naturale erat Mathematicam denominari ab intellectu. Cauſa Fallaciarum altera eſt, ignorare, quid ſit motus & proprietates ejus, id eſt ignorare omnium rerum cauſam naturalem immediatam. Fallacias illas notas quas in Elenchis enumerat Ariſtoteles, quibus vix puer decipi poteſt prætermitto. Pro maxima Geometriæ pernicie accuſo primò *lineam ſine latitudine*, rem inconceptibilem. Secundò pro Radice Numeri, ſuppoſitum Figuræ quadratæ latus. Tertiò, non intellectam

lectam naturam Rationis. Quartò, omnem Infiniti conſiderationem tum Geometricam tum Arithmeticam. Atque hic finem facerem, niſi fuiſſet qui demonſtrari etiam poſſe ea diceret, quæ non intelligibilia neque explicabilia, neque comprehenſibilia ſunt. Id quod eſt ſcientias omnes nihili eſſe dicere.

Nihil (inquit) *eſt in natura rerum magis obvium quam Quantitas continua & Motus localis. Atque hæc aut ſunt aut non ſunt in Infinitum diviſibilia, Disjunctiva hæc poteſtne negari? Diceturne, neque eſſe neque non eſſe ſic diviſibilia? Eligat aliquis membrum ejus utrum vult. Tolletne difficultates quæ in eo inſunt? Aut Objectionibus quæ in contrarium fieri poſſunt reſpondebit?*

Quæſtiones licet ſint, vim tamen habent hoc loco Negationum. Objiciat ergo difficultates ſuas. Rem ego ipſam explicabo, nempe id ipſum quòd Scriptores Mathematici intelligunt quando dicunt, quantitatem diviſibilem eſſe in Infinitum. Non enim dicunt nec intelligunt finitam quantitatem (puta lineam) diviſibilem eſſe in partes numero Infinitas; ſed lineam quantulamcunque natura ſua diviſionis capacem eſſe. Neque per diviſionem intelligunt ſeparationem materialem, id eſt ſeparationem partis a parte; ſed in omni quantitate continua ſupponi quantitatem adhuc minorem, & eam quoque aſſignabilem; & diviſionis hanc ſignificationem aliam non eſſe quam partis in toto utcunque exiguo illimitatam conſiderationem. De quocunque autem dici poteſt quod Totum ſit, in eodem rectè dici poteſt eſſe partes. Ut autem homo mortalis aliquid in æternum dividere poſſet, aut ſi id poſſet facere, ut partes tamen non eſſent ſemper numero finitæ, impoſſibile eſt. Quod autem de linea dicitur, intelligi etiam debet de Motu, Tempore, & omni diviſibili præter numerum. Producatur nunc contra hæc Objectio (nullam enim me legiſſe memini) ut videatur an non poſſit facilè intelligi utrum firma an infirma ſit. Porro

Suppono (inquit) *notum pleriſque eſſe Zenonis argumentum illud celebre, quod appellatur Achilles; utque diſputator ille magnus dum per impoſſibilia & abſurda ab utraque parte apparentia, Motum localem rem impoſſibilem eſſe demonſtrabat, ab uno Auditorum ſurgente & per Scholam ambulante confutatus fuerit.*

Quorum verborum ſumma hæc eſt, confutatum quidem fuiſſe ab ambulante Zenonem, ſententiam autem ejus juſta demonſtratione ducente ad abſurdum rectè illatam eſſe. Argumentum Zenonis quale ſit, ut a lectore judicari poſſit exponam ego. Quoniam ſpatium tranſiri motu, ne minimum quidem poteſt, quin ejuſdem ſpatii priùs dimidium tranſeundum ſit; & ſpatii quantulicunque ſuum rurſus eſt dimidium, & ſic perpetuò; concludit Zeno (aſſumpto ſpatium nullum tranſiri poſſe in inſtante) Infinito tempore opus eſſe ut ſpatium quantulumcunque permeari poſſit. Mani-

festum autem est si spatium permeari non potest sine motu æterno, omnino permeari non posse.

Argumentum hoc acceptum a Zenone Magistro exemplificaverunt Stoici in Achille pedibus veloci, & tardigrada Testudine, dicebantque (committentes in stadio Achillem & Testudinem) hanc quantulacunque distantia antecedentem, Achillem nunquam assequuturum esse. Quare autem? Quia dum dimidiam distantiam illam percurrebat Achilles, promovebatur etiam Testudo aliquantulum; & rursus percurrente reliquæ distantiæ dimidium, promovebatur iterum etiam Testudo. Puderet has nugas recitare, nisi vidissem quos minimè oportuit hujusmodi Fallaciis puerilibus decipi posse. Quid autem respondendum est? Respondendum est primò, mirum non esse, si antecedentem quanquam tardum nunquam assequatur is qui nolit. Talis enim est natura Motus ut qui velocitatem suam pro ratione spatii quod relinquitur, semper vult aut cogitur remittere, ne minimum quidem spatium percurrat unquam. Secundò quod ut ab Uno Toto aliquo, & ejus dimidio, & dimidii dimidio, & sic æternùm, minus erit quam duo. Tantum abest ut faciant tempus Infinitum. Ab illo ergo Zenonis argumento inferri non potest Achillem velocitate qua erat præditus Testudinem cursu non potuisse assequi; sed hoc tantum, potuisse (si libuisset) etiam non assequi. Exemplum ergo Paralogismi Zenonii non probat demonstrationem esse posse de re quæ non sit intelligibilis. Pergit,

Scientiarum humanarum omnium, facilimæ, evidentissimæ, comprehensibilissimæ, sunt puræ & simplicissimæ Mathematicæ. In Geometria tamen & Arithmetica quot sunt Propositiones firmiter demonstratæ, quæ sunt tamen inexplicabiles, incogitabiles, incomprehensibiles? Exempla adducam pauca, &c.

Nonne sunt absurda hæc? An demonstrare dicetur veritatem nisi illam faciat ut appareat & intelligatur? Qui sciam, verum an falsum sit, quod animo imaginari non possum? Sed legamus exempla quæ subjuncturum se esse dicit.

1. *Quod minimum spatium conceptibile æquale esse potest spatio alteri super eandem basem & ejusdem altitudinis cujus latera protracta fuerint in Infinitum.*

Parallelogramma quidem & triangula ejusdem altitudinis super eandem basem omnia inter se æqualia esse nemini non intelligibile est. Quod addit, *Cujus latera protrahuntur in Infinitum*, absurdum est. Sicut enim scamnum non dicitur antequam perficiatur; ita neque spatium antequam finiatur. Quod autem Infinitum est, non finitur, neque finiri potest.

Nam planè impossibile & absurdum est, Nec ex Torricellio sequitur Finitum Infinito æquale esse.

2. *Finitum Infinito majus esse potest.* Quis dixit? Ubi legitur? Tacet. Nam absurdum est.

3. *Quod*

3. *Quod omnes Anguli contactus circulares ſunt æquales.* Quid eſt Angulus contactus circularis? Oratio ipſa inexplicabilis eſt.

4. *Appropinquatio æterna duarum linearum, concurſus tamen impoſſibilis, nempe Aſymptotum.* Hujus cauſa explicata ſupra eſt in Paralogiſmo Zenonis.

5. *Affectus Surdarum & irrationalium quantitatum,* &c. *Hæc omnia ita demonſtrata ſunt ut negari non poſſint; & multa alia, quæ tamen inexplicabilia, incomprehenſibilia, incogitabilia ſunt.* Quænam autem ſunt illæ ſurdæ & irrationales quantitates? Quaſdam eſſe quantitates continuas quæ rationem numeri ad numerum non habent, nemo neſcit Mathematicus, & vocari Incommenſurabiles. Sed earum etiam quæ commenſurabiles inter ſe ſunt, multæ ſunt irrationales; quia commenſurabiles inter ſe quanquam ſint, quantitati tamen alicui arbitrariè ſumptæ commenſurabiles non ſunt, dicuntur eſſe rationales.

6. *Intelligine poſſunt & plene comprehendi, exprimi, & explicari in numeris Affectiones Unitatis & Ternarii; ut eſſet in natura Quantitas una, nec alia, quæ cum ſuis poteſtatibus infinitis aſcendentibus, & radicibus deſcendentibus omnes eſſent inter ſe æquales, vel potius idem.* Verba ipſa obſcuriuſcula ſunt; ſed id quod dictum voluit, puto, hoc eſt. Cum poteſtas quadrata numeri, & numerus quadratus; item poteſtas ſecunda & numerus Cubus, &c. Arithmeticis idem ſit; & radix numeri quadrati, numerus ille dicatur, qui multiplicatus in ſe aliquem efficit; & radix numeri Cubi idem quod numerus ille qui multiplicatus in ſe, & rurſus in productum facit aliquem; & *unum* in ſe quotieſcunque multiplicatum, nihil amplius faciat quam unum; manifeſtum eſt productos omnes & eorum radices, eaſdem eſſe Unitates. Arcanum ergo hoc quanquam Unitati proprium ſit, intellectu tamen difficile non eſt; quia per unum multiplicari nihil poteſt.

Poſtremò, *An explicari, cogitari, comprehendi* (inquit) *poteſt ex radicibus Infinitis potentialibus numeri 3, vel una aliqua?*

Non poteſt. Scio. Et cur non poteſt, neque aliorum numerorum multorum ſcio, & explicare poſſum, & breviter. Quia Radicem nullam habent.

Cap. XII.

De Infinito.

Ad vocem *Infinitum* ſubauditur res aliquæ ut Opus, Tempus, Spatium, *&c.* Si ſubaudiatur Opus, tunc ſignificat Opus inchoatum quidem ſed nondum ad eum finem perductum quem animo ſuo deſtinarat Artifex. Itaque hoc ſenſu, Infinitum idem eſt quod imperfectum, nec finitum; ſed quod finiri poteſt. Quale eſt incepta quidem, ſed non exædificata domus. Si quis igitur diceret de Opifice, fuiſſe illi in animo Opus perficere Infinitum, abſurdè loqueretur; tanquam ſi diceret in animo fuiſſe quod in animo non erat. Cuique enim tantum in animo eſt facere quantum perficere. Itaque de opere non ſuo, utrum finitum & perfectum, an Infinitum & Imperfectum ſit, rectè judicare, inconſulto Opifice, nemo poteſt.

Infinitum, ſi ſubaudiatur ſpatium, ſignificat ſpatium majus quam quod numero quantocunque menſurarum, ut pedum, paſſuum, milliarium, vel etiam diametrorum Terræ, aut Orbis Stellarum fixarum æquari poteſt, id eſt, quod terminis includi non poteſt. Similiter Infinitum Tempus eſt quod neque dierum neque horarum numerus ullus æquat.

Ergo de *Infinito* ſecundum ſenſum hunc dici non poteſt aliud alio majus eſſe. Ducatur enim recta A B finita, & ſuppona- D A C B E
tur producta ultra B per E in Infinitum. Ergo ——————————
tum recta BE —— tum ABE —— longitudine ſunt Infinitæ. Eſt autem A B E —— major quam B E —— tanto quanta eſt longitudo A B. Eſto. Secetur A B bifariam in C; & ponatur A D æqualis A C; & ſupponatur producta in directum per F in Infinitum. Erit ergo A D F —— major quam D F —— tanto quanta eſt longitudo finita C D, id eſt quanta eſt A B.

Quare C B E —— & C A D —— non ſunt inæquales, eſt ergo punctum aliquod, eſt in linea —— D B —— Infinita, medium. Itaque centrum Sphæræ Infinitæ erit punctum C; idque (quia puncta A & B ſumpta ſunt ad libitum) in omni puncto Infinitæ Sphæræ erit Sphæræ centrum. Itaque ſemidiametri Sphæræ Infinitæ a quolibet centro, ſive A, ſive B, ſive C, ſunt inter ſe non-inæquales. Non eſt ergo una linea Infinita major quam alia.

Per

Per eandem ratiocinationem, si linea A B ponatur pro finito tempore, probari potest duo Æterna inæqualia esse non posse.

Causa autem quare in Infinito considerari potest finitum, in eo consistit, quod neque Corpus subjectum est in cogitante, neque spatium, corporis Imago, in re cogitata, sed tantummodo in memoria. In memoria autem & sensu Infinitum esse non potest.

Infinitum autem a Mathematicis sæpissimè dicitur pro *Indefinito*. Indefinitum autem est idem quod *quantumvis magnum*, & aliquando pro *Infinitè parvo*, modo non sit *Nihil*. Dividi enim in Infinitum, id est in Nihila quantitas nulla potest. Dicitur etiam Infinitum aliquando pro *Quantum est possibile*. *Infinitum* autem propriè dictum nihil est, nisi superet mensurarum datarum numerum omnem assignabilem. Sed demonstratum esse aiunt a Torricellio Solidum quoddam acutum Hyperbolicum, etiam hoc sensu *Infiniti*, æquale esse Cylindro cuidam, cujus quidem basis habeat diametrum æqualem dimidiæ basi Hyperbolæ, altitudinem verò æqualem ejusdem Hyperbolæ axi transverso. Demonstrationem hujus Problematis sæpius & attentè legeram; neque quicquam inveni Paralogismi. Inveni tamen distantiam quam Torricellius supponit Infinitam, intelligi de distantia indefinita; nec potuisse ab ipso aliter intelligi, qui Principio utitur Cavalleriano de Indivisibilibus in valde multis demonstrationibus; quæ Indivisibilia Cavallerii talia sunt ut eorum aggregatum æquale possit esse cuicunque datæ magnitudini æquale. Itaque propositio tam absurda quam hæc est, *Infinitum Finito esse æquale*, Torricellio ascribi non debet, Solidum enim tam exile nullum esse potest, quod Infinitè non excedat omne Solidum finitum, ut manifestum est lumine naturali. Absurditas illa Arithmeticorum est disputantium de Infinito, & superficiem & solida mensurantium per lineas sine latitudine, qui inter Arithmeticam & Geometriam nullam animadvertentes differentiam, radicem numeri (quæ numeri sui quadrati pars est) pro eadem re habuere cum Figuræ quadratæ latere, quanquam latus sui quadrati partem non esse confiteantur. De Mathematica dixi. Quid Algebristæ in contrarium dicturi sunt expecto.

TABULA.

CAP. I. DE *Subjecto, Principiis, & Methodo Mathematicæ.* Pag. 1.

CAP. II. *De Ratione.* 5.

CAP. III. *De Operationibus Algebricis.* 8.

CAP. IV. *De Quadratis Figuris & Quadratis Numeris.* 10.

CAP. V. *De Angulis.* 13.

CAP. VI. *De Ratione Perimetri ad Radium Circuli.* 15.

CAP. VII. *De Mediis Proportionalibus.* 20.

CAP. VIII. *De Ratione Quadrati ad Quadrantem Circuli ſibi inſcripti.* 24.

CAP. IX. *De Solidis & eorum Superficiebus.* 27.

CAP. X. *Iterum de Solidis & eorum Superficiebus Methodo alia per cauſas efficientes.* 30.

CAP. XI. *De Demonſtratione.* 35.

CAP. XII. *De Fallaciis.* 38.

CAP. XIII. *De Infinito.* 42.

FINIS.